סילבוס לקורס: מערכות דינמיות 001.2.4057

מקום: קמפוס (מרקוס) ב"ש

סמסטר סתיו, יקבע עם הסטודנטים

3 נק"ז (3 ש' הרצאה)

מערכות רבות בעולם החי והדומם מציגות דינמיקה לא לינארית הבאה לידי ביטוי בדרכים שונות: איבוד יציבות של מצב מערכת והתפתחותו למצב אחר תוך שבירת סימטריה, תגובה קיצונית להפרעות קטנות, התנהגויות אוניברסליות ועוד. מערכות אלו מתוארות לרוב על ידי משוואות דיפרנציאליות לא לינאריות רגילות (מד"ר) או חלקיות (מד"ח). הקורס נועד להקנות כלים בסיסיים, אנליטיים וחישוביים, לניתוח מערכות לא לינאריות, תוך הדגמתם בעזרת מודלים של מערכות פיזיקליות, סביבתיות, כימיות וביולוגיות.

נושאים ספציפיים:

- מוטיבציה ודוגמאות להתנהגות לא ליניאריות בטבע: תהודה במתנדים מאולצים, תנודות כימיות וביולוגיות, סוליטונים בנוזלים ואופטיקה, פריקה חשמלית, אותות עצביים ופרפור לב, ותבניות צומח באזורים צחיחים.
- מושגי יסוד בדינמיקה לא לינארית והדגמתם בעזרת מד"ר: יציבות ואי-יציבות ליניארית של פתרונות נייחים (נקודות שבת), מרחב פאזה, אגני משיכה.
- דיאגרמת הסתעפות (ביפורקציה), סיווג ואיפיון של ביפורקציות (saddle-node, transcritical, pitchfork, etc.), ביפורקציות סופר-קריטיות וסאב-קריטיות וההקבלה למעברי פאזה מסוג שני וראשון.
- משפט היריעה המרכזית (center manifold theorem) ואינווריינטיות.
- תנודות ומסלולים מחזוריים (Hopf bifurcation), משפט פואנקרה-בנדיקסון (Poincaré–Bendixson theorem), תורת פלוקה (Floquet theory), העתקות פואנקרה (Poincaré sections and maps), פתרונות מחזוריים וקוואזי-מחזוריים.
- ביפורקציות גלובליות כגון הומוקליניות והטרוקליניות, מבוא לתורת שילניקוב (Shil’nikov homoclinics), הקשר לגלים סוליטריים (excitable systems) וחזיתות גל (fronts).
- ריבוי פתרונות לא-יציבים ודינמיקה כאוטית, מושך מוזר (strange attractor), מעריכי ליאפונוב (Lyapunov exponents), פרקטלים.
- מערכות משמרות אל מול לא-משמרות (דיסיפטיביות), דינמיקה במערכות המילטוניות אל מול גרדיאנטיות, כלומר בעלות פונקצית אנרגיה (ליאפונוב), פוטנציאל כימי (כופלי לגרנז'), מצבים מטה-סטביליים.
- מבוא למערכות לא-לינאריות מרחביות המתוארות על ידי מד"ח, דוגמאות להופעת תבניות מרחביות כגון: חזיתות גל בפרו-מגנטים, פסים ומשושים בנוזלים, וגלים ברקמות לב ובתאים, תבניות תהודה בתנודות כימיות שמאולצות מחזורית.
- שיטות נומריות לפתרון משוואות דיפרנציאליות לא ליניאריות: מציאת נקודות שבת, שיטת רונג-קוטה לפתרון בעיות תנאי התחלה במד"ר, שיטת הפרשים קבועים לפתרון בעיות תנאי שפה במד"ר ועבור מד"ח.

ציון: 10% הגשת שבועית של תרגילים, 30% פרויקט אמצע, 60% פרויקט סיכום

ספרות:

1. S.H. Strogatz, Nonlinear Dynamics and Chaos: with Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering, 2nd Edition, CRC Press 2015

2. J.D. Murray, Mathematical Biology (Parts I & II), 3rd Edition, Springer, 2007

Course syllabus: Dynamical Systems 001.2.4057

Place: BGU main (Marcus) campus
Fall semester, TBD with students

3 credit points (3 hour lecture)

Many living and inanimate systems exhibit nonlinear dynamics expressed in various ways: loss of system state stability and its evolution to another by symmetry breaking, extreme response to small disturbances, universal behaviors and more. These systems are most often described by ordinary (non-linear) or partial (non-linear) differential equations. The course aims to provide basic, analytical and computational tools for analyzing nonlinear systems, demonstrating them with models of physical, environmental, chemical and biological systems.

Specific topic:

- Motivation and examples of nonlinear behavior in nature: resonance in forced oscillators, chemical and biological oscillations, solitons in fluids and optics, electrical discharge, neural signals and cardiac arrhythmia, and patterns in arid regions
- Basic concepts in nonlinear dynamics and their demonstration with the help of ordinary differential equations (ODEs): Stability and linear instability of stationary solutions (fixed points), phase space, and basins of attraction
- Bifurcation theory, classification and characterization of bifurcations (saddle-node, transcritical, pitchfork, etc.), supercritical and subcritical bifurcations and relation to second and first phase transitions.
- Invariance and center manifold theorem
- Hopf bifurcation and limit cycles, Poincaré – Bendixson theorem, Floquet theory, Poincaré sections and mapping, periodic and quasi-periodic solutions
- Global bifurcations, such as homoclinic and heteroclinic, introduction to Shil'nikov homoclinic theory, connection to localized waves, such as excitable pulses and fronts
- Multiplicity of unstable solutions and chaotic dynamics, strange attractors, Lyapunov exponents, and fractals
- Energy dissipation vs conservation (Leaponov functional), dynamics in the Hamiltonian vs gradient systems, i.e., chemical potential (Lagrange multipliers), meta-stable states
- Introduction to spatially extended systems described by nonlinear partial differential equations (PDEs), examples of spatial patterns such as: Wave fronts in ferromagnetism, stripes and hexagons in fluid convections, waves in the heart and cells, resonant patterns (mode-locking) in under periodic forcing
- Numerical methods for solving non-linear differential equations: Finding roots, Runge-Kutta methods for solving initial value problem in ODEs, finite difference methods for boundary value problems in ODEs and PDEs.

Grading: 10% submission of weekly home exercises, 30% midterm project, 60% final project

References:

1. S.H. Strogatz, Nonlinear Dynamics and Chaos: with Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering, 2nd Edition, CRC Press 2015
2. J.D. Murray, Mathematical Biology (Parts I & II), 3rd Edition, Springer, 2007