

אוניברסיטת בן גוריון בנגב  
מזכירות אקדמית  
המרכז ללימודים קדם אקדמיים  
נתיב לאקדמיה

**שם הקורס: חשיבה מתמטית**

**סילבוס זה תקף החל משנת הלימודים תשע"ז**

הקורס יימשך 13 שבועות

מספר שעות ההרצאה בשבוע יהיה 5 ש"ש

**מטרת על :** פיתוח יכולת החשיבה המתמטית, הבנת מושגי יסוד במתמטיקה וקבלת הערכה חילופית לציון הפסיכומטרי הכמותי על סמך הקורס.

**מטרת הקורס :**

1. לחזור על חלק מן החומר הבסיסי במתמטיקה של בית ספר תיכון
2. ללמד על מושגי יסוד במתמטיקה שמקורם בלוגיקה מתמטית ומושגי היחסים והפונקציות
3. לערוך הכרה ראשונה עם לימוד מופשט (הוכחות של טענות מתמטיות והבנה יסודית של מושגי יסוד בניגוד לשינון של נוסחאות ושימוש בהן)

**נושאי לימוד**

**I. מבוא ללוגיקה.**

1. מושגים בסיסיים: פסוק פשוט, פסוק מורכב. ערכי האמת של פסוקים.
2. הפעולות הלוגיות: "או", "וגם" ו-"שלילה". האלגברה של הפעולות הלוגיות. טבלאות האמת של הפעולות הלוגיות. פעולות לוגיות נוספות: "גרירה", "אם ורק אם". טאוטולוגיות, שקילות לוגית.
3. הכמתים הלוגיים "לכל" ו-"קיים" ושימושים בהם. האלגברה של הכמתים הלוגיים.

**II. מבוא לתורת הקבוצות.**

1. מושג הקבוצה (הגדרה מדויקת של קבוצה, הפרדוקס של ראסל), הקבוצה האוניברסאלית, שייכות של איבר לקבוצה, יחס ההכלה (הכלה חלשה והכלה חזקה) בין קבוצות. הפעולות הבסיסיות על קבוצות (איחוד, חיתוך, והמשלים). פעולות נוספות על קבוצות: הפרש, הפרש סימטרי... האלגברה של הפעולות הבסיסיות: אסוציאטיביות, חילופיות, דיסטריבוטיביות, המשלים הינו אינולוציה וחוקי דה מורגן.
2. המכפלה הקרטזית.
3. יחסים דו-מקומיים. תכונות של יחסים דו-מקומיים: רפלקסיביות, סימטריות, אנטי-סימטריות, טרנזיטיביות.
4. יחס שקילות. יחס סדר חלקי.
5. הגדרה של מושג הפונקציה. תכונות של פונקציות: "חד-חד-ערכיות", "על".
6. הרכבה של פונקציות. אסוציאטיביות של הרכבה. היפוך פונקציות. הגרף של פונקציה והקשר שלו עם מכפלה קרטזית ועם מושג היחס הדו-מקומי.
7. עוצמה של קבוצה.
8. קבוצת החזקה.

**III. הוכחות של טענות במתמטיקה.**

1. מהי הוכחה של טענה במתמטיקה (החל מהאכסיומות).
2. הוכחה ישירה.

3. הוכחה בדרך השלילה  $((A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\sim B \Rightarrow \sim A))$ .

4. מהן דוגמה ודוגמה נגדית.

#### IV. אינדוקציה מתמטית.

1. אכסיומת הסדר טוב במערכת המספרים הטבעיים.
2. האינדוקציה המתמטית. אינדוקציה חלקית ואינדוקציה שלמה. הוכחה באינדוקציה. החשיבות של "שלב הבדיקה".
3. שימוש באינדוקציה בהוכחות ובניסוח טענות. הוכחת זהויות ואי שוויונות.

#### V. מבוא לקומבינטוריקה.

1. קומבינטוריקה בסיסית – מהי ספירה?  
ספירה כחישוב של פונקציה חד-חד ערכית ועל בין קבוצה נתונה לבין קבוצה מן הסוג  $\{1, 2, \dots, N\}$ .  
הקשר שבין גודלן של שתי קבוצות לעובדה שהאחת מוכלת בשנייה.  
אם  $A$  ו- $B$  קבוצות סופיות ו- $A \subseteq B$  אז כל פונקציה  $f: A \rightarrow B$  שהיא על היא חד-חד ערכית.

אם  $A$  ו- $B$  קבוצות סופיות ו- $A \subseteq B$  אז כל פונקציה  $f: B \rightarrow A$  שהיא חד-חד ערכית היא על.

2. עקרון החיבור, עיקרון הכפל.
3. חליפות, תמורות וצירופים. דגימה עם חזרות וללא חזרות.
4. משפט ה-EXCLUSION-INCLUSION. (בתלות בזמן).

#### IV. פונקציות בין קבוצות של מספרים.

1. פונקציות שתחום ההגדרה שלהן והטווח שלהן הן תת-קבוצות של המספרים הממשיים.
2. פונקציה מונוטונית ומונוטונית ממש, פונקציות זוגיות ואי-זוגיות.
3. הקשר שבין התכונות: "חד-חד ערכיות", "על" לבין הגיאומטריה של הגרף (מונוטונית ממש וההיטל של הגרף על ציר ה- $Y$ ).
4. הרכבה של פונקציות. פונקציות הפוכות. זוגות של פונקציות והפונקציות ההפוכות להן.
5. פונקציה חזקה ופונקציה שורש. אלגברה של חזקות ושורשים.
6. מדידת זוויות בעזרת אורך קשתות (רדיאנים). פונקציות טריגונומטריות. פונקציות טריגונומטריות הפוכות.
7. הפונקציה הלוגריתמית והפונקציה המעריכית.
8. תכונות של לוגריתמים ופונקציות מעריכיות. אי שוויונות מעריכיים ולוגריתמיים.
9. טרנספורמציות של גרף הפונקציה כתוצאה מ:  
 $y = f(|x|)$ ,  $y = |f(x)|$ ,  $y = f(x+a)$ ,  $y = a \cdot f(x)$ ,  $y = f(x) + a$
10. פתרון גרפי של משוואות מן הצורה  $f(x) = g(x)$  ואי שוויונות מהצורה  $f(x) \leq g(x)$ .

## VII. טכניקה אלגברית.

1. הערך המוחלט. אי שוויון המשולש. משוואות ואי שוויונות עם ערך מוחלט.
2. המשוואה הריבועית והקשר שבין השורשים למקדמים (נוסחאות וייטה).  
השלמה לריבוע שלם.

$$y = a(x \pm b)^2 \pm c \quad \text{פרבולה בהצגה:}$$

קודקוד של פרבולה ונקודות חיתוך עם הצירים.

## VIII. גיאומטריה מישורית.

1. ישירים מקבילים. זוויות מתחלפות, משלימות ומתאימות. האורך של קטע ישר. האורך של קו שבור. האורך של עקום.
2. חפיפת משולשים. משפטי החפיפה של משולשים.
3. דמיון משולשים. משפטי הדמיון של משולשים. היחסים שבין גבהים, תיכונים, חוצי זוויות, מחוגים של מעגלים חוסמים וחסומים, שטחים, והיקפים במשולשים דומים.
4. המעגל: קשתות, מיתרים, הזווית ההיקפית והזווית המרכזית והקשר ביניהן, הזווית הפנימית והזווית החיצונית, המשיק למעגל והזווית בין המשיק למיתר. המעגל החוסם והמעגל החסום של משולש.
5. משפט פיתגורס.
6. שטחים של משולש, מקבילית, טרפז – שיטות נומריות לחישוב שטחים. משפט הירון.
7. פרופורציה בין קטעים. משפט חוצה זווית.
8. \*בעיות בניה בגיאומטריה. חציית קטע, אורך לקטע, חציית זווית...

## IX. בעיות מילוליות.

בעיות תנועה (מהירות קבועה) ושאלות עם אחוזים.

## X. טריגונומטריה.

1. הנוסחאות הבסיסיות:  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1, \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$
2. זהויות טריגונומטריות פשוטות.
4. משוואות טריגונומטריות. הפתרון הכללי והפתרון בתחום נתון.
- 5.\* אי שוויונות טריגונומטריים פשוטים.

## XI. הנדסת המרחב.

1. מושגי היסוד: הנקודה, הישר, והמישור. דרכי הקביעה של המישור.
2. המצבים ההדדיים שבין ישרים במרחב, בין ישר ומישור ובין שני מישורים. זוויות: בין ישר ומישור ובין שני מישורים. ישר מקביל או משופע למישור, ההיטל של ישר על מישור.
3. רב-פאונים: המקבילון, התיבה, המנסרה, הפירמידה.
4. הזוויות שבין פאות, בין פאה למקצוע.

## XII. חשבון דיפרנציאלי.

1. מושג הגבול וחישוב גבולות.
2. רציפות. משפט ערך הביניים. בדיקה של קיום הפתרון וספירת הפתרונות של משוואות באמצעות המשפט.
3. הנגזרת של פונקציה בנקודה נתונה. המשיק והנורמל לגרף פונקציה בנקודה נתונה.

- הפונקציה הנגזרת. נגזרות מסדר גבוה יותר. הקשר בין גרף הפונקציה הנגזרת לגרף הפונקציה המקורית. גרף הפונקציה הנגזרת השנייה.
4. כללי הגזירה של סכומים, הפרשים, מכפלות ומנות של פונקציות.
5. כלל השרשרת וגזירת פונקציות סתומות. הקשר בין הנגזרות של הפונקציה ושל הפונקציה ההפוכה לה.
6. נגזרות של פונקציות סטנדרטיות – פולינומים, פונקציות טריגונומטריות, מעריכיות, חזקות ופונקציות לוגריתמיות.
7. חקירת פונקציות: נקודות קיצון, תחומי עליה וירידה, מכסימום ומינימום מקומי וגלובלי, קמירות קעירות ונקודות פיתול ושירטוט גרפים של פונקציות.

### **XIII. אלגברה ליניארית**

1. וקטורים ומטריצות מעל שדה המספרים הממשיים. פעולות יסודיות: חיבור וכפל. תכונות של הפעולות.
2. מערכת משוואות ליניאריות ומטריצות, הצגה מטריצאלית של מערכת ופתרון של מערכת.
3. פתרון של מערכת משוואות ליניאריות על ידי שיטת האלימינציה של גאוס.

### **XIV. רגרסיה ליניארית.**

אופטימיזציה של השגיאה לפי מינימום הריבועים.

#### מרכיבי הציון:

- 4 מבדקי כיתה (כל אחד 25 נקודות)
- בוחן אמצע
- מבחן סופי

#### חישוב הציון הגולמי:

- במידה וציון הבוחן גבוה מציון המבחן הסופי:
- 10% מבדקים + 30% בוחן אמצע + 60% מבחן סופי.
- במידה וציון הבוחן נמוך מציון המבחן הסופי:
- 10% מבדקים + 15% בוחן אמצע + 75% מבחן סופי.

#### ספרות מומלצת

1. בני גורן, מתמטיקה ( 4 ו- 5 יחידות לימוד ), חלק ה', שאלון 035005
2. בני גורן, מתמטיקה ( 5 יחידות לימוד ), חלק ז', שאלון 035007
3. הווארד אנטון, חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי א', ( נספח ב' – טריגונומטריה ), האוניברסיטה הפתוחה, 1995.
4. אנטון ה', חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ב'. הוצאת האוניברסיטה הפתוחה (1995).
5. ברגר ש. מתמטיקה דיסקרטית III. לוגיקה מתמטית. האוניברסיטה הפתוחה.

6. גינזבורג א. מתמטיקה דיסקרטית IV. קומבינטוריקה. האוניברסיטה הפתוחה.

7. בן-ציון קון, סמי זפרני, חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1, הוצאת בק (1996).

8. Thomas G. B. and Finney R. L., Calculus and Analytic Geometry, 9th edition, Addison-Wesley, 1998.