החוק השני של ניוטון

ד"ר אמנון יוסף

1. מבוא

כפי שראינו, הסיבה להתנהגותה של מערכת הוא שקול הכוחות הפועלים עליה. הקשר בין שקול הכוחות למצב המערכת, מתואר על ידי החוק השני של ניוטון ושני החוקים האחרים מתארים את אופיים של הכוחות ואת מערכות הייחוס מהן ניתן לתאר את המערכת תחת דרישת האובייקטיביות במכניקה הקלאסית. כדי לתאר את חוקי ניוטון, אנו נדרשים למושג "מצב שיווי משקל" או "מצב התמדה". לפני שנגדיר מהו מצב שיווי המשקל עבור מערכות אותן אנו מנתחים עם חוקי ניוטון, נגדיר את מצבי שיווי המשקל.

1. **שיווי משקל יציב** – אם גוף נמצא במצב כלשהו, ואנו מזיזים אותו במקצת ממצבו, והוא שואף לחזור למצבו המקורי, נאמר שהוא בשיווי משקל יציב.
2. **שיווי משקל רופף** – אם גוף נמצא במצב כלשהו, ואנו מזיזים אותו במקצת ממצבו, והוא שואף להתרחק ממצבו המקורי, נאמר שהוא בשיווי משקל רופף.
3. **שיווי משקל אדיש** – אם גוף נמצא במצב כלשהו, ואנו מזיזים אותו במקצת ממצבו, והוא נשאר במצבו החדש, נאמר שהוא בשיווי משקל אדיש.

כאשר אנו מטפלים בגופים או במערכות, אנו נאמר שגוף נמצא במצב שיווי משקל (מצב התמדה) אם הוא נע **במהירות קבועה**. כפי שאנו יודעים מאלגברה וקטורית, אם גוף נע במהירות קבועה, הדבר יתכן רק על קו ישר. אם כך, אם גוף חווה תאוצה, הוא לא נמצא במצב התמדה (שיווי משקל).

2. החוק הראשון של ניוטון (חוק האינרציה או חוק ההתמדה)

חוק זה בא לאפיין את מערכות הייחוס האינרציאליות, ההתמדיות, מהן ניתן לתאר באופן אובייקטיבי את מצבה של המערכת ובמיוחד את תאוצתה. באופן מילולי, ניתן לנסח חוק זה באופן הבא: גוף ינוע במהירות קבועה (על קו ישר – יתמיד במצבו) אם לא יאלץ לשנות ממצבו זה על ידי שקול כוחות חיצוניים השונה מאפס. אם אנו מעוניינים לנסח זאת באופן מתמטי, נרשום חוק זה בצורה:

$$\text{מצב התמדה} \quad \Leftrightarrow \quad \sum \vec{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{0}$$

חוק זה נותן לנו מרשם לגבי מערכות הייחוס האינרציאליות (קיימות אינסוף מערכות ממין זה): אם ישנה מערכת ייחוס בה גוף חופשי (ששקול הכוחות החיצוניים עליו הוא אפס או שלא פועלים עליו כוחות חיצוניים) מתמיד במצבו (נע במהירות קבועה על קו ישר), אזי במערכת ייחוס זו ניתן למדוד את תאוצתו האובייקטיבית של הגוף. אם אנו נמצאים במערכת ייחוס בה גוף חופשי חווה תאוצה, נקבל תוצאות שלא תואמות את ההתרחשות בטבע ונצטרך לבצע טרנספורמציות.

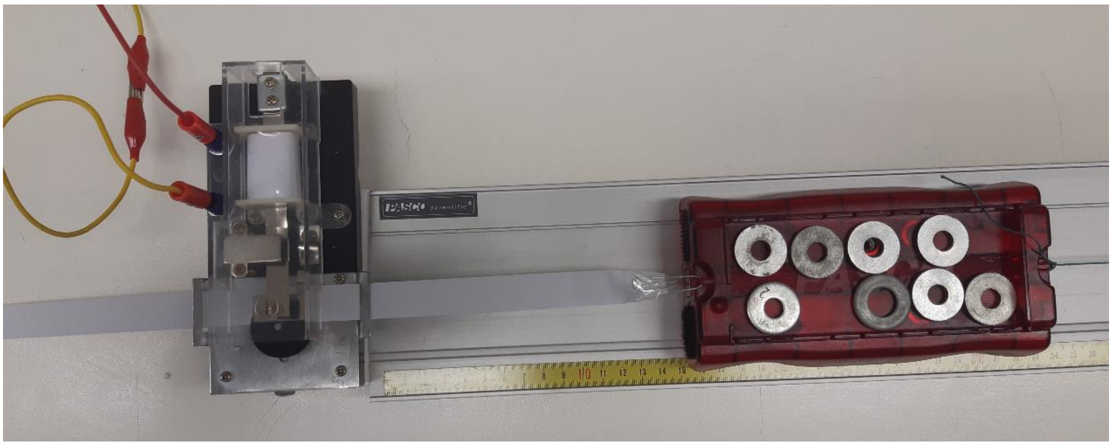
3. החוק השלישי של ניוטון (חוק האקציה והריאקציה או חוק הפעולה והתגובה)

הניסוח של חוק זה הוא: אם גוף אחד מפעיל כוח על גוף שני, אזי השני מפעיל על הראשון את אותו הכוח בגודלו, אך בכיוון הנגדי. במובן מסוים, חוק זה מסביר לנו מהו תנאי הכרחי לכוח – כוח הוא זה, שיש לו תגובה על פי החוק השלישי של ניוטון. למשל, הכוח הצנטריפוגלי נקרא "כוח מדומה" מכיוון שהוא לא מציית לחוק השלישי של ניוטון. חשוב לציין שחוק זה לא מסביר לנו מהו כוח.

4. **<u>החוק השני של ניוטון</u>**

במקרה של החוק השני של ניוטון, מציגים מושג חדש המכונה "מסה". נסתכל על מערכת הניסוי המופיעה באיור מספר 1. המערכת מורכבת מקרונית המונחת על מסילה ומחוברת לקופסה עם משקולות באמצעות חוט. ניתן להזניח את החיכוך בין גלגלי הקרונית למסילה ביחס לכוחות האחרים הפועלים על הקרונית. על הקרונית ניתן להוסיף משקולות. בחלק הראשון של הניסוי נשתמש במשקולות הגדולות יחסית והן מסדר גודל של מסת הקרונית.

(א) צילום מערכת הניסוי בנושא החוק השני של ניוטון



(ב) צילום הקרונית עם המשקולות ורשם הזמן

איור מספר 1: מערכת ניסוי בנושא החוק השני של ניוטון

נשים משקולת תלויה כדי שכוח הכבידה יהיה הכוח המאיץ את המערכת ואותו נשאיר קבוע. נתחיל את הניסוי עם העגלה ריקה ובכל פעם נמצא את תאוצת המערכת (ההסבר של מציאת התאוצה באמצעות רשם הזמן מצוי בהמשך הפרק). לאחר מכן, נחבר לקרונית קרונית נוספת זהה ושוב נחשב את תאוצתה – במקרה זה נראה שהתאוצה קטנה פי 2 מהתאוצה התחילית. לאחר מכן, נחבר קרונית נוספת, זהה לקודמות ונראה שתאוצת המערכת קטנה פי 3 מהתאוצה התחילית. אם כך, ככל שאנו מוסיפים קרוניות למערכת, כך תאוצתן קטנה וניתן לומר שהן "מתנגדות יותר לשינוי מהירותן" או מתנגדות יותר לתאוצה". ניתן לראות שככל שמספר העגלות גדל כך קטנה התאוצה באופן פרופורציוני. ניתן לומר שלעגלות יש תכונה המתנגדת לתאוצה ולה נקרא "מסה". נגדיר את המסה להיות: המסה היא מקדם הפרופורציה בין שקול הכוחות לתאוצה בחוק השני של ניוטון (בהמשך לימודי המכניקה ניתן להגדיר את המסה גם באמצעות התנע).

$$\frac{\left|\sum \vec{F}\right|}{|\vec{a}|} = const. = m\ (mass)$$

חשוב לזכור שכאשר חורגים מהמכניקה הניוטונית, המסה קשורה לאנרגיה בקשר המפורסם:

$$E = mc^2$$

והקשר בין המסה למהירות הוא:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

ניתן לערוך ניסוי בו אנו מגלים שתאוצתו של הגוף פרופורציונית לכוח השקול הפועל עליו. נשאיר את מסת הקרונית קבועה (נשים אותה ללא משקולות או עם מספר משקולות קבוע) ונשנה את המשקל התלוי. אם נגדיל את המשקל התלוי פי n נראה שתאוצתה של המערכת גדלה פי n גם כן. כמובן שאנו צריכים לדון על מושג המשקל והקשר שלו למסה.

לסיכום, ניתן לרשום את החוק השני של ניוטון בצורה:

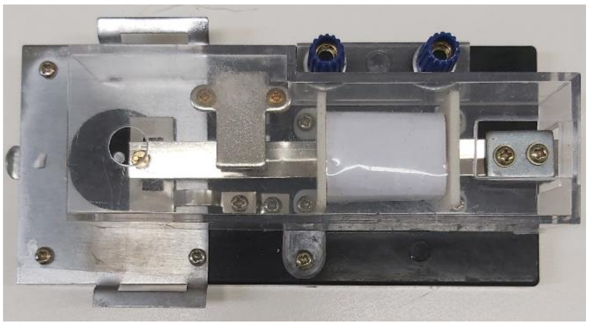
$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

הערה: חשוב לציין שהחוק השני של ניוטון, כפי שכתוב למעלה, נכון רק עבור מקרים בהם מסתו של הגוף אינה משתנה. אם מסת הגוף משתנה, למשל כמו ברקטה, החוק השני של ניוטון נרשם בעזרת קצב השינוי בתנע של המערכת,

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\vec{a}$$

5. <u>רשם הזמן</u>

רשם הזמן שצילום שלו מופיע באיור מספר 1 בשני היטלים, צד ועל, הוא מכשיר שניתן לחשב בעזרתו מהירות של גופים – המהירות הממוצעת. את רשם הזמן מחברים למקור מתח משתנה בתדירות של 50 הרץ – "תדר הרשת". המתח משתנה מחיובי לשלילי ומשלילי לחיובי 100 פעמים בשנייה. הזרם החשמלי, בעטיו של המתח החשמלי, זורם בסליל ומשרה שדה מגנטי. מכיוון שכיוון הזרם משתנה, משתנה גם כיוון השדה המגנטי בסליל. בתוך הסליל עובר פס ממתכת רכה המגיב לשדה המגנטי. ניתן לראות פס זה באיור ב'.

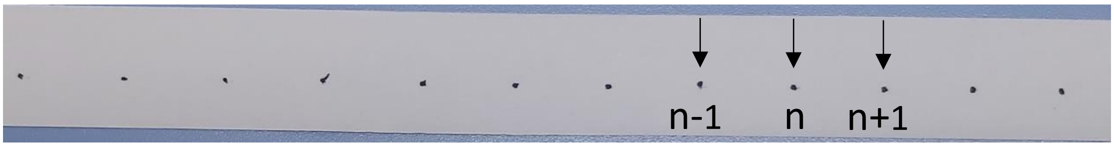


(א) רשם הזמן – היטל על

(ב) רשם הזמן – היטל צד

איור מספר 2: צילום רשם הזמן

כאשר ישנו זרם בכיוון אחד, על הפס פועל כוח מגנטי המפעיל מומנט בכיוון אחד ואז הפס מוסח כלפי מעלה. כאשר הזרם החשמלי מחליף את כיוונו בסליל, על הפס פועל כוח ומומנט בכיוון נגדי מכיוון שהשדה המגנטי בסליל שינה את כיוונו והפס המתכתי מוסח כלפי מטה. בקצה הפס ישנה סיכה או בורג אשר בכל פעם שהפס מוסח כלפי מטה, מכים על נייר העתקה (נייר פחם) ומשאירים נקודה על פס נייר העובר מתחת לנייר ההעתקה. פס הנייר קשור לגוף אשר את מהירותו אנו רוצים למדוד והוא נע עם הגוף, משמע הדבר הוא שבכל רגע, מהירותו של פס הנייר היא מהירותו של הגוף אליו הוא קשור. תוצאה אופיינית מוצגת באיור מספר 3.



איור מספר 3: נקודות על פס הנייר הקשור לגוף ועובר ברשם הזמן.

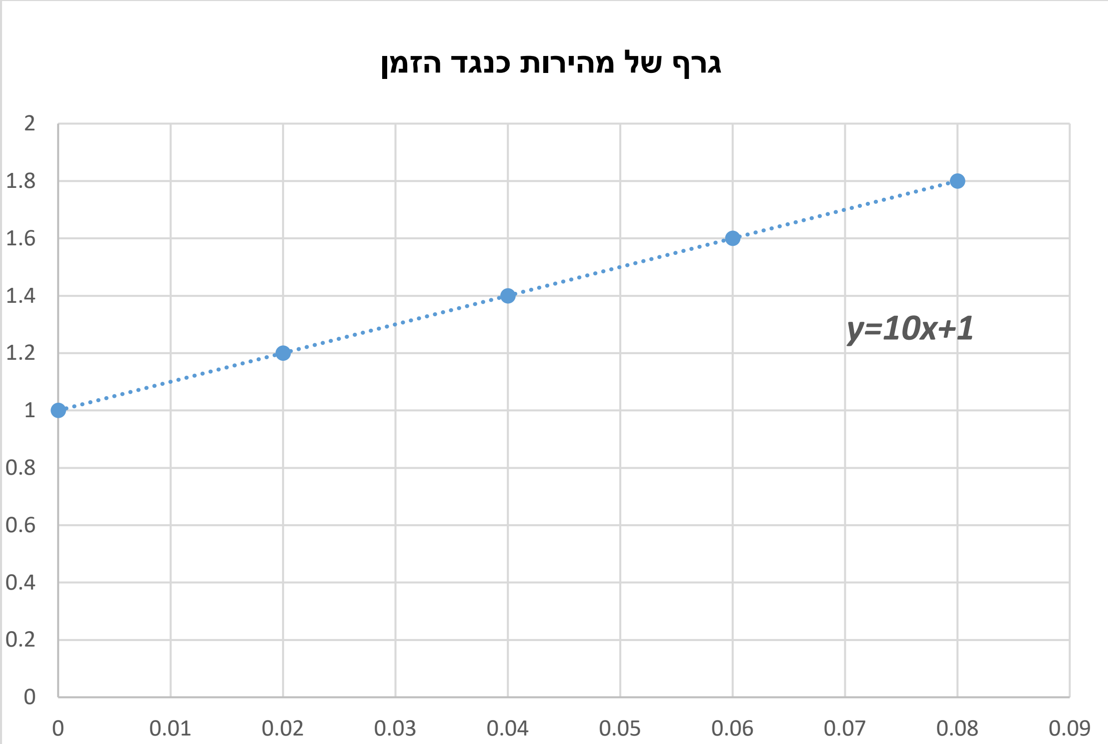
מכיוון שידועה לנו תדירות זרם החילופין העובר בסליל, ניתן לחשב את פרק הזמן העובר בין כל סימן היווצרות נקודה אחת לאחרת,

$$\mathrm{T} = \Delta t = \frac{1}{f} = \frac{1}{50} = 0.02\ s$$

מכיוון שאנו יודעים לחשב רק מהירות ממוצעת, כדי לדעת מהי מהירות הקרונית (או כל גוף אחר הקשור לסרט), עלינו לחשב את המהירות בעזרת המרחק בין שתי נקודות ואז המהירות הממוצעת תהיה מהירות הגוף באמצע של אותו הקטע (בהנחה שהתאוצה קבועה). אם אנו מעוניינים לדעת את המהירות בנקודה n, עלינו לקחת את המרחק בין הנקודה n+1 לנקודה n-1, $d(n+1, n-1)$ ולהציב בהגדרת המהירות.

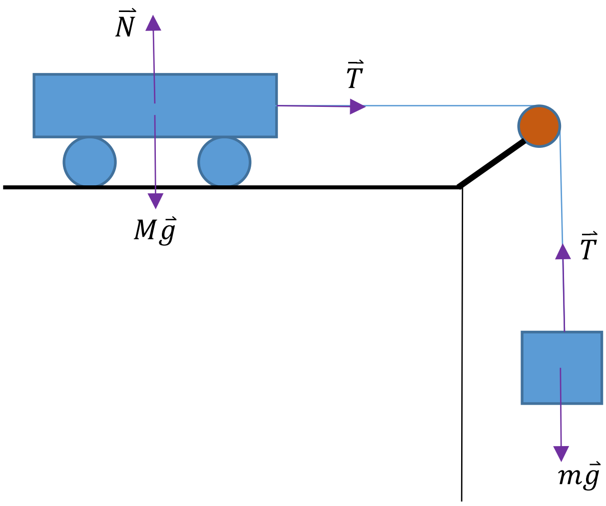
$$v_n = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{d(n+1,n-1)}{2T} = \frac{d(n+1,n-1)}{0.04}$$

בצורה זו, עלינו לחשב את מהירות הקרונית עבור מספר נקודות (בדרך כלל לוקחים חמש נקודות) ובעזרתן לשרטט גרף של מהירות כנגד הזמן (את הראשית של הזמן ניקח במיקומה של הנקודה הראשונה אך כמובן שזוהי בחירה שרירותית). בגרף של מהירות כנגד הזמן, שיפוע הגרף הוא התאוצה ובהנחה שהתאוצה קבועה, הקו המתאים למעבר בין הנקודות, יהיה קו לינארי. ממשוואת קו זה, ניתן לדעת מהי תאוצת הקרונית עבור מצב נתון. דוגמא לגרף ממין זה נתונה באיור מספר 4 בעמוד הבא (בגרף זה, הנקודות נמצאות על הקו הישר, אך במציאות, הנקודות לא תהיינה כולן על הקו הישר בעטיין של שגיאות במדידות – דבר שלא ניתן להימנע ממנו אלא רק לנסות ולהקטין את השגיאות במדידה. כאשר הנקודות אינן על הקו הישר, אני מעבירים קו ישר אותו ניתן לקבוע, שיפוע ונקודת החיתוך עם הציר האנכי, בעזרת שיטה מתמטית המכונה "שיטת הריבועים המינימליים"). עבור כל סרט נייר נבנה גרף, בעזרתו נקבל את התאוצה ונחזור על פעולה זו 5 פעמים. (במקרה של גרף הדוגמא, התאוצה היא $10\ m/s^2$). נסתכל כעת על מערכת הניסוי ונפתח את משוואות התנועה בעזרתן נמצא את הקשר בין מאפייני המערכת (תאוצה, מסה, שקול כוחות). אנו אמנם מפתחים את משוואות התנועה באמצעות החוק השני של ניוטון אך זהו רק רמז למשתנים שאת הקשר ביניהם אנו בודקים.



איור מספר 4: גרף של מהירות כנגד הזמן

נסתכל על המערכת המתוארת באיור מספר 5. נזניח את כוחות החיכוך בין גלגלי הקרונית למסילה ואת החיכוך של הגלגלת (השפעת כוחות הגרר על המערכת זניחים עוד יותר). נתייחס לשני הגופים הקשורים בחוט, כאל מערכת אחת (בעטיו של החוט, תאוצת הגופים שווה) מהחוק השני של ניוטון נקבל:



איור מספר 5: מערכת הניסוי ומאזן הכוחות

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$mg = (M+m)a$$

$$a = \frac{1}{M+m} \cdot mg$$

נסמן $F = mg$ והוא יהיה, תחת כל ההנחות, הכוח השקול הפועל על המערכת וגורם לתאוצתה. אז נוכל לרשום את המשוואה בה נשתמש,

$$a = \frac{1}{M+m} \cdot F$$

6. <u>חלק ראשון של הניסוי – תלות התאוצה בכוח השקול (מסת המערכת קבועה)</u>

בחלק זה של הניסוי נשמור על מסת המערכת קבועה $M + m = const.$ נמדוד את מסת הקרונית, הקופסה אותה נתלה ועוד ארבע משקולות – זוהי מסת המערכת. נתלה את הקופסה עם משקולת אחת בקצה החוט ונשים מספר משקולות על הקרונית.

1. נחבר את הסרט לקרונית, נשחרר ונריץ אותה.
2. נעביר משקולת מהקרונית לקופסה התלויה ונחזור על הניסוי.
3. נבצע ארבעה שינויים כך שנקבל חמישה סרטים, כמו זה המתואר באיור מספר 3.

7. <u>חלק שני של הניסוי – תלות התאוצה במסה (הכוח השקול קבוע)</u>

בחלק זה של הניסוי נשמור על הכוח השקול קבוע $F = const.$ נתלה מסה בקצה החוט ואת הקרונית נותיר ללא משקולות בתחילה

1. נחבר את הסרט לקרונית, נשחרר ונריץ אותה.
2. נוסיף משקולת לקרונית ונחזור על שלב מספר 1 (הכוח השקול – המושך את הקרונית, קבוע אך מסת המערכת משתנה).
3. נבצע ארבעה שינויים כך שנקבל חמישה סרטים, כמו זה המתואר באיור מספר 3.

8. <u>ניתוח התוצאות</u>

8.1. <u>ניתוח תוצאות החלק הראשון</u>

8.1.1 בחלק זה של הניסוי בו מסת המערכת נשארת קבועה, נבנה גרף של מהירות כנגד הזמן עבור כל סרט ובאמצעות גרף זה נמצא את תאוצת המערכת.

8.1.2 נבנה את הטבלה הבאה.

$a\ \left({}^{m}/_{s^2}\right)$	$F = mg\ (N)$
a_1	F_1
a_2	F_2
a_3	F_3
a_4	F_4
a_5	F_5

8.1.3 נשרטט גרף של התאוצה כנגד כוח המושך ונעביר קו לינארי (רצוי להוסיף למשוואת הישר, גם את המתאם R^2-).

8.2. ניתוח תוצאות החלק השני

8.2.1 בחלק זה של הניסוי בו מסת המערכת נשארת קבועה, נבנה גרף של מהירות כנגד הזמן עבור כל סרט ובאמצעות גרף זה נמצא את תאוצת המערכת.

8.2.2 נבנה את הטבלה המופיעה בעמוד הבא כאשר העמודה השלישית הינה עמודה מחושבת.

8.2.3 נשרטט גרף של התאוצה כנגד מסת המערכת ונעביר קו ישר. כפי שנראה, המתאם של קו זה אינו טוב מספיק ולכן אנו מניחים שהתלות אינה תלות לינארית.

8.2.4 נשרטט גרף של התאוצה כנגד ההופכי של מסת המערכת (ציפור קטנה לחשה לנו שזוהי תלות שראוי לבדוק אותה) ונעביר קו לינארי. במקרה זה המתאם אמור להיות טוב ולכן אנו מסיקים שהתאוצה פרופורציונית להופכי של המסה. כמובן שניתן להמשיך ולחפש תלות אחרת של התאוצה במסה, אם אנו רוצים לדמיין תהליך של חקר ניסיוני. נזכור שחוקר אינו יודע מה התלות של המשתנה התלוי במשתנה הבלתי תלוי ולכן מעורבות בתהליך זה אי ודאויות וחישוב שגיאות עם סטטיסטיקה. בסופו של דבר, עלינו להחליט מתי אנו סומכים על תוצאות הניסוי. באמצעות תוצאות אלו, אנו חוזים תחזיות לניסויים עתידיים ואם הן מתקיימות, ההחלטה שלנו בדבר התלות בין המשתנים תחשב כנכונה. תהליך זה ימשך עד שנגלה סטיות שיאלצו אותנו לבחון את התיאוריה שוב.

$a\ \left({}^{m}/_{s^2}\right)$	$\mathrm{M}+m\ (Kg)$	$\frac{1}{M+m}\ \left(\frac{1}{Kg}\right)$
a_1	$(\mathrm{M}+m)_1$	$\frac{1}{(\mathrm{M}+m)_1}$
a_2	$(\mathrm{M}+m)_2$	$\frac{1}{(\mathrm{M}+m)_2}$
a_3	$(\mathrm{M}+m)_3$	$\frac{1}{(\mathrm{M}+m)_3}$
a_4	$(\mathrm{M}+m)_4$	$\frac{1}{(\mathrm{M}+m)_4}$
a_5	$(\mathrm{M}+m)_5$	$\frac{1}{(\mathrm{M}+m)_5}$

9. סיכום

בניסוי זה מצאנו שתאוצת המערכת פרופורציונית לכוח השקול (במקרה של הניסוי – כוח הכבידה הפועל על המסה התלויה) ומצאנו שתאוצת המערכת פרופורציונית להופכי של מסת המערכת.

$$a \propto F$$

$$a \propto \frac{1}{m}$$

ומכאן ניתן להסיק שהכוח השקול פרופורציוני למכפלה של המסה בתאוצה – **החוק השני של ניוטון**.

9. **הצעה לפתרון תרגילים עבור מערכות המתמידות במצבן או מערכות מאיצות**

1. קראו את השאלה בעיון רב ורשמו את הנתונים – **הבנת הנקרא** היא מרכיב מרכזי בפתרון התרגילים.

2. ציירו ציור סכמתי של המערכת (אפשר לרשום את הנתונים בשלב זה).

3. סמנו את **כל** הכוחות הפועלים על הגופים הרלוונטיים לפתרון התרגיל – שלב זה נקרא "מאזן כוחות". הגופים הרלוונטיים הם אלו, אשר באמצעות משוואות התנועה שלהם, נפתור את הבעיה ונגיע לחוף מבטחים. בצד כל גוף כזה, סמנו את כיוון תאוצתו באמצעות וקטור התאוצה.

4. בחרו מערכות צירים נוחות, בהן מוצגת מירב האינפורמציה בה תשתמשו לפתרון הבעיה. השתדלו שמערכות הצירים תהיינה נוחות גם באשר לפירוק הווקטורים לרכיביהם (למשל, וקטורים רבים ככל האפשר יהיו על הצירים, סכום וקטורים בציר כלשהו יתאפס).

5. שרטטו את "דיאגרמת הגוף הבודד". דיאגרמת הגוף הבודד היא ציור של מערכת צירים ניצבת (קרטזית) בה הגוף מיוצג על ידי ראשית הצירים (מרכז המסה) ומופיעים בה וקטורי הכוח הפועלים על הגוף. בצד הדיאגרמות שרטטו את וקטורי התאוצה.

6. בחרו כיוונים חיובים (בדרך כלל, ימינה – שמאלה, למטה – למעלה, לכיוון מרכז המעגל - בניצב למעגל, לכיוון מרכז המעגל – במשיק למעגל). אם באחד הצירים הגוף חווה תאוצה, מומלץ לבחור את כיוון התאוצה כחיובי (כלל אצבע).

7. רשמו את משוואות ניוטון ופרקו אותן לרכיביהן.

7.1 **מערכות מתמידות**

$$\sum \vec{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases}$$

7.2 **מערכות מאיצות**

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sum F_x = ma_x \\ \sum F_y = ma_y \end{cases}$$

השתדלו לבחור, כך שבאחד הצירים, המערכת תתמיד במצבה ואז התאוצה בציר זה תתאפס -

($a_x = 0$ או $a_y = 0$) ואז רכיב התאוצה הנותר יהיה התאוצה ($a_x = 0$ ואז $a_y = a$, או $a_y = 0$ ואז $a_x = a$)

7.3 **גוף הנע במעגל אופקי – תנועה מעגלית במהירות ש<u>גודלה</u> קבוע** (בדרך כלל, בציר הניצב למישור המעגל, הגוף מתמיד במצבו)

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \sum F_R = ma_R \left(a_R = \dfrac{v^2}{r} = \omega^2 r \right) \\ \sum F_{\perp,T} = 0 \end{cases}$$

8. הציבו את רכיבי הווקטורים במשוואות ופתרו.

לפני הפתרון, שאו תפילה לגורם טרנסצנדנטאלי, אימננטי או כל גורם אחר, להצלחה – אך מומלץ ללמוד ולסמוך על עצמכם.

9. המלצה - הציגו את התשובות באופן אלגברי ובאופן מילולי.