

תאריך הבחינה: 28-02-2019.

שם המרצה: דרי יגאל טור

מספר קורס: 681-2-0164

שם הקורס: מתמטיקה למנהל עסקים

עבור: מנהל עסקים

שנה: תשע"ט, בחינת פטור סמסטר ב'

משך הבחינה: 3 שעות

חומר עזר: מותר

הוראות לנבחן:

- יש לענות על 10 שאלות מתוך 12 השאלות במבחן.
- השאלות שוות ניקוד בערך - אם ישנם מספר סעיפים - ערכם שווה.
- אין לענות על יותר מעשר שאלות.

בהצלחה!

שאלה 1: (10 נק')

לפונקציה $y = ax^4 + bx^3$ יש נקודת פיתול $(-16; 2)$.

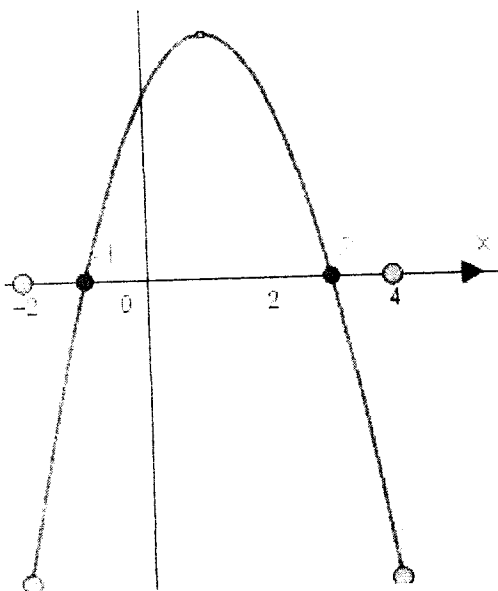
- (א) מצא את ערך הפרמטרים a ו- b .
- (ב) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
- (ג) האם יש לפונקציה נקודת קיצון חספת? נמק.
- (ד) מצא את תחומי הקמירות והקעירות של הפונקציה.

2 נקודות קיצון חספת

שאלה 2: (10 נק')

$f(x)$ היא פונקציה המוגדרת בתחום $-2 \leq x \leq 4$.

בציור מתואר גרף הנגזרת $f'(x)$.



(א) מצא את שעורי ה- x של נקודות הקיצון של $f(x)$

בתחום $-2 \leq x \leq 4$.

(ב) רשום את תחומי העליה והירידה של $f(x)$

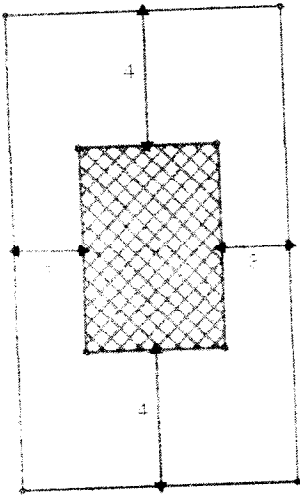
בתחום $-2 \leq x \leq 4$.

(ג) נתון: $f(4) > 0$, $f(-1) = -2$, $f(1) = 0$.

שרטט בקרוב את הגרף של $f(x)$.

(ד) שרטט בקרוב את הגרף של $f''(x)$.

(ה) רשום את נקודות הפיתול ואת תחומי הקעירות והקמירות של $f(x)$.



שאלה 3: (10 נק')

בחוברת מודפסת השטח המודפס בכל עמוד צ"ל 300 סמ"ר.
יש להשאיר בשוליים רווח של 3 ס"מ מכל צד
ו-4 ס"מ מלמעלה ומלמטה. (ראה ציור)
יש למצוא את אורך ורוחב הדף, כדי ששטחו
יהיה מינימלי, ומהו שטח זה.

שאלה 4: (10 נק')

נתונה הפונקציה $y = (x^2 + a)e^{-x}$.

- (א) מצא מה צריך להיות הערך של a , כדי שלפונקציה יהייה מקסימום בנקודה $x = 4$.
(ב) האם לפונקציה יש גם נקודת מינימום? אם כן – מצא אותה. אם לא – נמק מדוע.
(ג) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
(ד) מצא את תחומי הקמירות והקעירות של הפונקציה.
(ה) מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
(ו) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

שאלה 5: (10 נק')

שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = 2x \ln x + ax^2$ בנקודה $x = \frac{1}{e}$ הוא $-\frac{2}{e}$.

- (א) מצא את a .
(ב) מצא את נקודת הפיתול של הפונקציה, הראה שהמשיק בה מקביל לציר ה- x ומצא את משוואתו.
(ג) מצא את תחומי הקמירות והקעירות של הפונקציה.

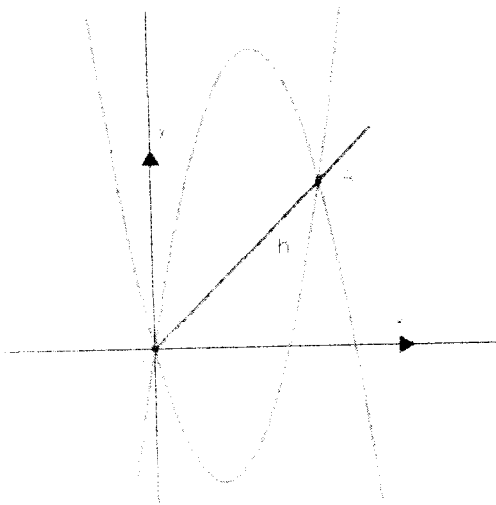
שאלה 6: (10 נק')

בשרטוט מתוארים הגרפים של הפונקציות

$$f(x) = x^2 - 4x \quad \text{ו-} \quad g(x) = -x^2 + 6x$$

הגרפים נחתכים בראשית הצירים O ובנקודה A.

הוכח כי הקו OA מחלק את השטח הכלוא בין שני הגרפים לשני שטחים שווים שטח.



שאלה 7: (10 נק')

מצא את הפונקציה $f(x)$ אם נתון שהנגזרת השנייה שלה היא $f''(x) = 12x^2 - 4$ והמשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x=1$ הוא $y=3x+1$.

שאלה 8: (10 נק')

לפונקציה $y = \sqrt{-x^3 + 2x^2 + ax}$ יש נקודת קיצון פנימית $x=3$.

- (א) מצא את a .
- (ב) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- (ג) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
- (ד) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- (ה) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

שאלה 9: (10 נק')

נתונה הפונקציה $y = \ln(3x^2 - 2x)$.

- (א) רשום את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- (ב) האם יש לפונקציה נקודות קיצון? נמק!
- (ג) רשום את המשוואות של האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה ואת תחומי העלייה והירידה שלה.
- (ד) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

שאלה 10: (10 נק')

האוכלוסייה במדינה מסויימת גדלה ב 20% במשך t שנים. אותה אוכלוסייה גדלה ב - 45% תוך $t+4$ שנים. האוכלוסייה גדלה בצורה מעריכית.

(א) מצא באיזה אחוז גדלה האוכלוסייה בכל שנה.

(ב) מצא את t .

(ג) שרטט בקירוב את הגרף של תהליך הצמיחה של אוכלוסייה זו. רשום מספרים על הצירים.

שאלה 11: (10 נק')

(א) נתונים הווקטורים $\underline{u} = (x^2, 9x, x, 1)$, $\underline{v} = (x, -x, 24, 10)$. חשב את שעורי נקודת

הפיתול המתקבלת על ידי המכפלה הסקלרית $\underline{u} \cdot \underline{v}$.

(ב) נתונות המטריצות $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ ו- $B = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

חשב את המכפלה $A' \cdot B'$ (מטריצות מוחלפות).

שאלה 12: (10 נק')

(א) חשב את שלושת הנגזרות החלקיות מסדר ראשון של הפונקציה

$$W = f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \text{ בנקודה } (2:3:1).$$

(ב) מצא את הנגזרות החלקיות מסדר שני של הפונקציה $f(x, y) = \ln(x^2 + y)$.

בהצלחה!

התשובות הן: $x=1$ ו- $x=3$
 הפונקציה היא: $y = x^4 - 4x^3$

28/2/19

$$y = ax^4 + bx^3$$

$$y' = 4ax^3 + 3bx^2$$

$$y'' = 12ax^2 + 6bx$$

ר(2) = -16

$$16a + 8b = -16$$

$$48a + 12b = 0 \Rightarrow b = -4a$$

$$16a - 32a = -16$$

$$a = 1$$

$$b = -4$$

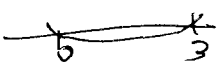
$f''(0) = 0$
 $f''(3) < 0$
 Max(34) = 28

$$y = x^4 - 4x^3$$

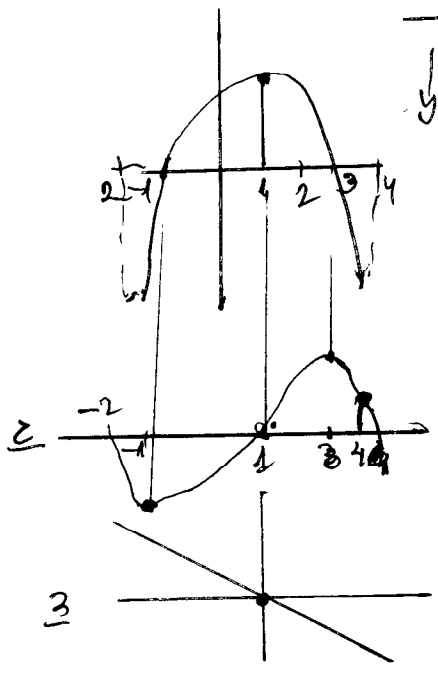
$$y' = 4x^3 - 12x^2 = 0$$

$$y'' = 12x^2 - 24x$$

השאלות הן:
 $x_1 = 0$ $x_2 = 3$



$x < 0$ ו- $x > 3$
 $0 < x < 3$



הפונקציה היא: $y = x^4 - 4x^3$
 $y' = 4x^3 - 12x^2$
 $y'' = 12x^2 - 24x$
 הפונקציה היא: $y = x^4 - 4x^3$
 הפונקציה היא: $y = x^4 - 4x^3$

$(1,0)$
 $-2 < x < 1$
 $1 < x < 4$

השאלות הן:

$$S = (x+6)(y+8) = (x+6)\left(\frac{300}{x} + 8\right)$$

$$xy = 300 \quad y = \frac{300}{x}$$

$$S = 300 + 8x + \frac{1800}{x} + 48$$

$$S' = 8 - \frac{1800}{x^2} = 0 \quad x^2 = 225$$

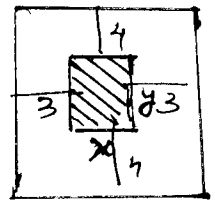
$$S_{min} = 21 \times 28 = 588$$

$$x = 15$$

$$y = 20$$

$$S'' = \frac{3600}{x^3} > 0$$

(מינימום)



$$y = (x^2 + a)e^{-x} \quad a = -$$

$$y' = 2xe^{-x} - e^{-x}(x^2 + a) = 0$$

K (4) → P.K.

$$e^{-x}(2x - x^2 - a) = 0 \quad f'(x) = 8 - 16a = 0$$

$$\underline{a = -8}$$

→ צד ימין

$$y = (x^2 - 8)e^{-x}$$

$$y' = 2xe^{-x} - e^{-x}(x^2 - 8) = e^{-x}(2x - x^2 + 8) = 0$$

$$2x - x^2 + 8 = 0 \quad x_1 = 4 \quad x_2 = -2$$

$$y'' = 2 - 2x \quad f''(4) = -6 \quad f''(-2) = 6$$

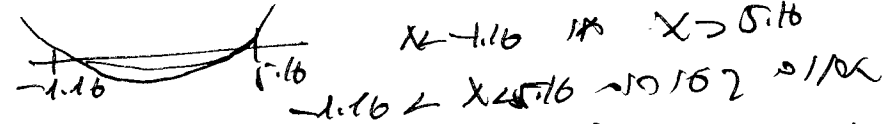
max(4: 8e⁻⁴) min(-2: -4e²) : 0.1

$x < -2$ או $x > 4$ → ירידה / עליה $-2 < x < 4$ → עליה / ירידה

$$y'' = e^{-x}(2 - 2x) + e^{-x}(2x - x^2 + 8) = e^{-x}(-x^2 + 4x + 10)$$

$$-x^2 + 4x + 10 > 0$$

→ ירידה / עליה



6e-8) -2√5 < 0 (2√5 < 0) x = √5 → עליה / ירידה

$$f(x) = 2x \ln x + ax^2$$

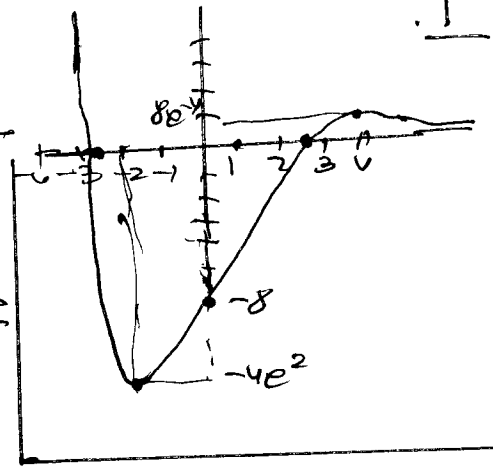
$$f'(x) = 2 \ln x + 2 + 2ax$$

$$f'(1/e) = -2 + 2 + 2a = -\frac{2}{e} \quad \underline{a = -1}$$

→ צד ימין

$$y = 2 \ln x - x^2$$

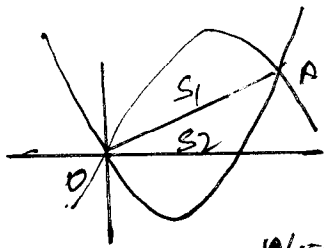
$$y' = 2/x - 2x = 0 \quad \underline{x = 1}$$



y = 1 מינימום x = 1/3 מינימום פונקציה 0

$0 < x < 1$ → עליה / ירידה

(→ צד ימין) $x > 1$ מינימום עליה



- 3 -

∴ A קוטר ונתון Ⓒ - D.K.E.

$$-x^2 + 6x = x^2 - 4x$$

$$2x^2 - 10x = 0 \quad x_1 = 5 \quad x_2 = 0$$

Ⓐ(5,5) 0(0,0)

∴ OA

170 → KINUN

$$m=1$$

$$y=x$$

$$S_1 = \int_0^5 (-x^2 + 6x - x) dx = -\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} \Big|_0^5 = -\frac{125}{3} + \frac{125}{2} = \frac{125}{6}$$

$$S_2 = \int_0^5 (x^2 - x + 4) dx = \int_0^5 (x^2 + 3x) dx = -\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} \Big|_0^5 = \frac{125}{6}$$

$$S_1 = S_2 = \frac{125}{6}$$

$$f''(x) = 12x^2 - 4$$

Ⓓ - D.K.E.

$$f'(x) = \int (12x^2 - 4) dx = 4x^3 - 4x + C$$

$$f'(1) = 3$$

$$4 - 4 + C = 3$$

$$C = 3$$

$$f'(x) = 4x^3 - 4x + 3$$

$$f(x) = \int (4x^3 - 4x + 3) dx = x^4 - 2x^2 + 3x + C_2$$

$$f(1) = 4$$

$$1 - 2 + 3 + C_2 = 4$$

$$C_2 = 2$$

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + 3x + 2$$

$$y = \sqrt{-x^2 + 2x^2 + ax}$$

Ⓔ - D.K.E.

$$f'(3) = 0$$

$$y' = \frac{-3x^2 + 4x + a}{2\sqrt{-x^2 + 2x^2 + ax}}$$

$$-27 + 12 + a = 0$$

$$a = 15$$

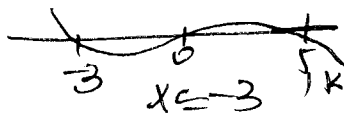
נתון

$$y = \sqrt{-x^2 + 2x^2 + 15x}$$

→ 300 P.M. 3

$$-x^2 + 2x^2 + 15x > 0$$

$$x(-x^2 + 2x + 15) \geq 0$$



$$0 \leq x \leq 5$$

$$y' = -3x^2 + 4x + 15 = 0$$

מציא ע

$$x_2 = -\frac{5}{3}$$

$$x_1 = 3$$

$$f''(3) = -14$$

$$\max(3; 6)$$

Ⓔ

$$y'' = -6x + 4$$

$$= 36 \rightarrow 15 \cdot 3$$

→ 300 P.M.



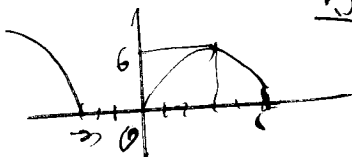
$$0 \leq x \leq 5$$

$$3 < x \leq 5$$

$$x \leq -3$$

⋆

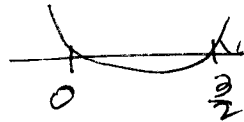
→ 200 P.M.



$$y = \ln(3x^2 - 2x)$$

-4-

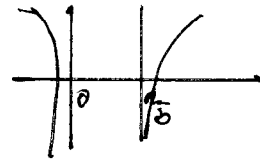
Ⓐ) P. מע



התחלה של פונקציה
 $3x^2 - 2x > 0$

$x < 0$ וכן $x > \frac{2}{3}$
 $y' = \frac{6x-2}{3x^2-2x}$ $x = \frac{1}{3}$ (נקודת מינימום)
 ההתחלה של פונקציה

($x < \frac{1}{3}$ וכן) $x < 0$ $x = \frac{2}{3}$ $x = \frac{2}{3}$ וכן $x > \frac{2}{3}$
 $\ln(3x^2 - 2x) = 0$
 $3x^2 - 2x = 1$
 $x_1 = 1$ $x_2 = \frac{1}{3}$



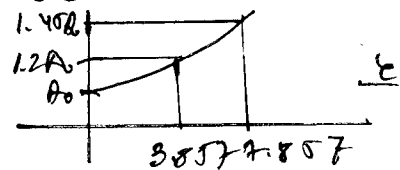
$$1.45 A_0 = 1.2 A_0 q^n$$

$$q = \sqrt[4]{\frac{1.45}{1.2}} = 1.0484 \text{ } \underline{\text{Ⓑ) P. מע}}$$

$$P = 4.84^\circ$$

$$1.2 A_0 = A_0 \cdot 1.0484^t$$

$$t = \frac{\ln 1.2}{\ln 1.0484} = 3.857 \text{ } \underline{\text{Ⓒ}}$$



$$u, v = x^3 - 9x^2 + 24x + 10$$

$$y' = 3x^2 - 18x + 24 \quad y'' = 6x - 18 = 0 \quad \underline{x = 3}$$

$$y = 27 - 54 + 72 + 10 = 55$$

$$A^+ \cdot B^t = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & 4 \\ 10 & -6 \end{pmatrix} \text{ } \underline{\text{Ⓒ}}$$

$$w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad w'_x = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \Big|_{2,3,1} = \frac{2}{\sqrt{14}} \text{ } \underline{\text{Ⓓ) P. מע}}$$

$$w'_y = \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \Big|_{2,3,1} = \frac{3}{\sqrt{14}} \quad w'_z = \frac{2z}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$z = \ln(x^2 + y) \quad z'_x = \frac{2x}{x^2 + y} \quad z'_y = \frac{1}{x^2 + y} \quad z''_{xx} = \frac{2(x^2 + y) - 4x^2}{(x^2 + y)^2} = \frac{2y - 2x^2}{(x^2 + y)^2}$$

$$z''_{xy} = \frac{-2x}{(x^2 + y)^2} \quad z''_{yy} = \frac{-1}{(x^2 + y)^2}$$