

תאריך הבחינה: 16.9.16

שם המורה: ד"ר יגאל טור

מבחן ב-שיטות כמותיות 1

מס' הקורס: 687-2-1007

מיועד לתלמידי: תכניות מנהלים

שנה: תשע"ו. סמסטר קיץ. מועד א'

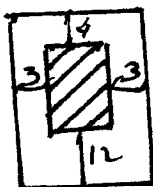
משך הבחינה: 3 שעות.

חומר עזר: מותר.

יש לענות על עשר מתוך שתיים-עשרה השאלות.
השאלות שוות בערכן. אם יש מספר סעיפים-ערכם שווה.
אין לענות על יותר מעשר שאלות.

בהצלחה!

1. הפונקצייה $f(x)$ מוגדרת לכל x , ומקיימת את התנאים הבאים:
א. $f'(x) = x^2 - 3x + 2$
ב. לפונקצייה יש נקודת מינימום $x = a$ ומתקיים $f(a) = 1$.



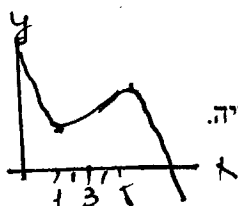
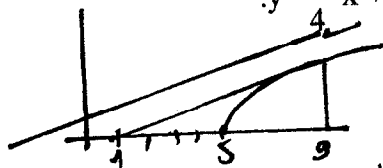
- נדרש: א. למצוא את הפונקצייה $f(x)$.
ב. לקבוע את נקודות המינימום והמקסימום.
ג. לקבוע תחומי עלייה וירידה.
ד. למצוא נקודות פיתול ותחומי קמירות וקעירות.
ה. לשרטט סקיצה של גרף הפונקצייה.

2. יש להקצות מגרש מלבני כדי לבנות בית מלבני אשר קירותיו מקבילים לצלעות המגרש. שטח המגרש צריך להיות 600 מ"ר. לפי חוקי הבנייה נדרש להשאיר בחזית המגרש רוח של 12 מטר ובצד האחורי 4 מטר. בצדדים יש להשאיר בכל צד 3 מטר בין קיר הבית לצלע הצדדית של המגרש.
עליך לקבוע את ממדי המגרש כך ששטח הבית יהיה מקסימלי, וכן את השטח (ברוטו) המקסימלי של הבית.

3. נתונה פונקצייה $f(x) = x^3 + ax^2 + 9x + 1$. המשיק בנקודה $x = 1$ מקביל לציר x .
א. מצא את ערכו של a .
ב. מצא את ערכו של x , שעבורו $f(x)$ מקבל ערך מינימלי, וכן מהו הערך המינימלי של הפונקצייה.
ג. מצא את שיעורי נקודת הפיתול של הפונקצייה.

4. א. הראה כי הפונקצייה $y = e^{1/x}$ יורדת בכל תחום הגדרתה. מהי נקודת אי ההגדרה ומה קורה בה?
ב. הסבר מדוע כל אחת מהפונקציות הבאות עולה בכל תחום הגדרתה: א. $y = x^3 + 4x$. ב. $y = x^5 + 2x^3 + 6x$.

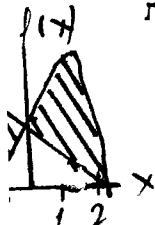
5. נתונה הפונקצייה $y = \sqrt{x-5}$. מעבירים משיק לגרף זה אשר מקביל לקו הישר $y = \frac{1}{4}x + 5$.
א. מצא את נקודת ההשקה, את משוואת המשיק ואת נקודת חיתוכו עם ציר x .
ב. מצא את השטח המוגבל בגרף הפונקצייה, במשיק ובציר x .



6. להלן נתון גרף של פונקצייה:
א. שרטט בקירוב את הגרף של הנגזרת.
ב. שרטט בקירוב את הגרף של הנגזרת השנייה.
ג. סמן בכל אחד משלושת הגרפים את נקודות הפיתול של הפונקצייה.

7. ערכו של ציוד חדש למפעל יורד בכל שנה ב-10% לעומת השנה הקודמת.
 א. אחרי כמה שנים ירד הציוד לרבע מערכו?
 ב. אם ערך הציוד היה 4 מיליון שקל לאחר 5 שנים- מה היה ערכו כשהיה חדש?
 ג. אם ערכו של ציוד יורד למחצית ערכו תוך 7 שנים- מהו % הפחת?

8. הנגזרות של שתי פונקציות הן: $f'(x) = -3x^2 + 3$ ו- $g(x) = -1$. אחת משתי נקודות החיתוך של הפונקציות היא (2:0).
 חשב את השטח המוגבל על ידי הגרפים של שתי הפונקציות (קו'ם יש למצוא את נקודות החיתוך).



9. נתונה הפונקצייה $f(x) = \ln(x^2 - 6x + 10)$.
 א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקצייה.
 ב. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה עם הצירים.
 ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקצייה.
 ד. מצא את מחומי העלייה והירידה של הפונקצייה.
 ה. מצא את נקודות הפיתול.
 ו. מצא את תחומי הקמירות והקעירות של הפונקצייה.
 ז. צייר סקיצה של גרף הפונקצייה לפי התוצאות שמצאת בסעיפים הקודמים.

10. שיפוע המשיק לגרף הפונקצייה $y = x^n e^x$ בנקודה $x=1$ הוא $4e$.
 א. מצא את n .

- ב. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה.
 ג. באיזו נקודה יש לפונקצייה נקודת פיתול, שהמשיק דרכה מקביל לציר x ? נמק!
 ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקצייה.

11. א. המשיק לגרף הפונקצייה $y = e^{ax} + x$ בנקודה $x=0$ עובר דרך הנקודה (2:7).
 מצא את a ואת משוואת המשיק.

ב. מצא את תחום ההגדרה ואת משוואת האסימפטוטות האנכיות של הפונקצייה $y = \ln(2x^2 - x - 15)$.
 (אין קשר בין שני הסעיפים).

12. נגזרת הפונקצייה $f(x)$ היא $f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$. ערך הפונקצייה בנקודת המינימום הוא 5.
 א. מצא את ערכו של x בנקודת המינימום.
 ב. מצא את ערכו של y (ערך הפונקצייה) בנקודת המקסימום.

הצלחה!

- 1 -

102ND 112ND

102ND 112ND

$f'(x) = x^2 - 3x + 2 = 0 \quad x_1 = 1 \quad x_2 = 2$ 102ND 112ND

$f''(x) = 2x - 3 \quad f''(1) = -1 \quad f''(2) = 1 > 0$

min (2:1) $f(x) = \int (x^2 - 3x + 2) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x + C$

$\frac{8}{3} - 6 + 4 + C = 1 \quad C = 1 + 2 - \frac{8}{3} = \frac{1}{3}$

$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x + \frac{1}{3}$

min (2:1)

max (1: $\frac{7}{6}$)

102ND 112ND

$x < 1$

102ND 112ND
 $1 < x < 2$

$x^2 - 3x + 2 > 0$
 $x^2 - 3x + 2 < 0$

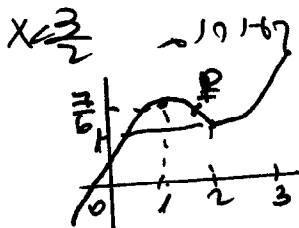
102ND 112ND

102ND 112ND

$2x - 3 = 0 \quad x = \frac{3}{2}$

$y = \frac{13}{12}$

$P(\frac{3}{2}, \frac{13}{12})$



$xy = 600$

$S = (x-6)(y-16) = xy - 16x - 6y + 96$

$S = (x-6)(\frac{600}{x} - 16) = 696 - 16x - \frac{3600}{x}$

$S' = -16 + \frac{3600}{x^2} = 0 \quad x^2 = 225 \quad x = 15$

$y = \frac{600}{15} = 40$

$S'' = -\frac{7200}{x^3} < 0$ (max)

$S_{max} = 24 \times 9 = 216$

$y = x^3 + ax^2 + 9x + 4$

$f'(1) = 0$ 102ND 112ND

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + 9$

$f'(1) = 3 + 2a + 9 = 0 \quad a = -6$

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0$

$x_1 = 1$

$x_2 = 3$

$f''(x) = 6x - 12$

$f''(1) = -6 \quad f''(3) = 6$

$x = 3 \quad y_{min} = f(3) = 27 - 54 + 27 + 4 = 1$

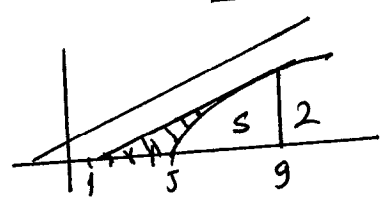
$f'' = 6x - 12 = 0$ 102ND 112ND

min (3:1)

$y = e^{\frac{1}{x}}$ $y' = e^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{-e^{\frac{1}{x}}}{x^2} < 0$ כ (4) - פקע

כאן \Rightarrow גיגונוק ה' 0'' $x=0$ הצדדים כי נאין

$y = x^3 + 4x$ $y' = 3x^2 + 4 \neq 0$ 1 2
 $y = x^5 + 2x^3 + 6x$ $y' = 5x^4 + 6x^2 + 6 > 0$ 2



$y = \sqrt{x-5}$ כ (5) - פקע
 $y' = \frac{1}{2\sqrt{x-5}} = \frac{1}{4} \Rightarrow \sqrt{x-5} = 2 \quad x-5=4$
 $x=9 \quad y=2$ (9,2) הנקודה נמצאת

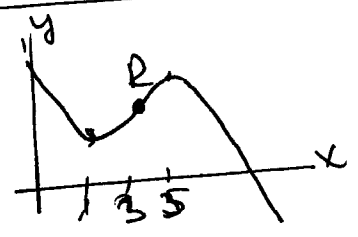
$y-2 = \frac{1}{4}(x-9) \Rightarrow 4y-8 = x-9$ קו המנג'ל

(1:0) $x=1$ $x-4y=1$
 כמו x ו-3 זה זמנתי

$S = \int_5^9 \sqrt{x-5} dx = \int_5^9 (x-5)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2(x-5)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_5^9 = \frac{2 \cdot 8}{3} = \frac{16}{3}$ 7

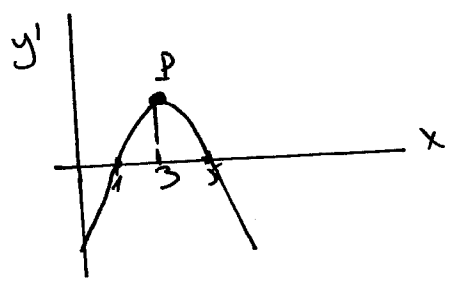
$\frac{8 \cdot 2}{2} = 8$ זהו הנגזר
 $8 - \frac{16}{3} = \frac{8}{3}$ הנגזר הנגזר

הנגזר של



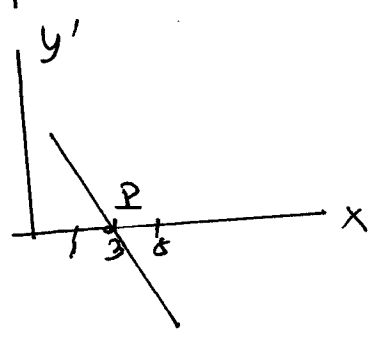
(6) - פקע

הנגזר של



כ

הנגזר של



ז

אנחנו, $x=3$ נמצאת נקודה
 הנגזר 0-1 נמצאת

$q = 0.9$

$\frac{1}{4} A_0 = A_0 \cdot 0.9^x$

7 - PKU

$x = \frac{\ln \frac{1}{4}}{\ln 0.9} = 13.157$

$A_5 = 4 = A_0 \cdot 0.9^5$

$A_0 = \frac{4}{0.9^5} = 6.774000$

2

$0.5 A_0 = A_0 q^7$

$q = \sqrt[7]{0.5} = 0.9057$

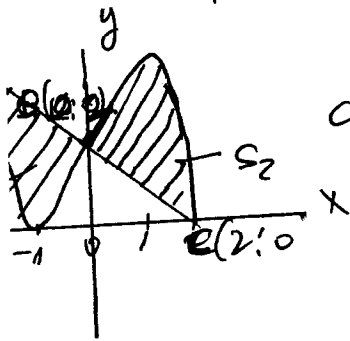
2

$p = -9.43\%$

$f'(x) = -3x^2 + 3$

$g'(x) = -1$

8 - PKU



$f(x) = \int (-3x^2 + 3) dx = -x^3 + 3x + C$ $-8 + C + 6 = 0$
 $C = 2$
 $f(x) = -x^3 + 3x + 2$

$g(x) = -x + C$

$g(2) = 0$

$g(x) = -x + 2$

! g(x) = -x + 2

$-x^3 + 3x + 2 = -x + 2$

$-x^3 + 4x = 0$

$x = 0$

$x = 2$

$x = -2$

$S_1 = \int_{-2}^0 (x^3 - 4x) dx = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right]_{-2}^0 = 0 - (4 - 8) = 4$ $B(0:2)$

$-x + 2 + x^3 - 3x - 2 = x^3 - 4x$

$S_2 = \int_0^2 (-x^3 + 4x) dx = \left[-\frac{x^4}{4} + 2x^2 \right]_0^2 = -4 + 8 = 4$

$-x^3 + 3x + 2 - (-x + 2) = -x^3 + 4x$

$S_1 + S_2 = 4 + 4 = 8$

$y = \ln(x^2 - 6x + 10)$

$\sqrt{36 - 40}$

$x^2 - 6x + 10 > 0$!K

$x \in \mathbb{R}$

$y' = \frac{2x - 6}{x^2 - 6x + 10} = 0$

$x = 3$

$y'' = 2 > 0$ min(3:0)

2

$2x - 6 < 0$

max

!PKU

$2x - 6 > 0$

\Rightarrow min

2

5

$$y = e^{ax+1}$$

$$y' = ae^{ax+1}$$

$$x=0 \quad f(0)=1 \quad (0:1)$$

$$y-1 = (a+1)(x-0)$$

$$-1 = (a+1)2$$

$$y-7 = 3(x-2) \Rightarrow$$

$$f'(0) = a+1$$

אם $a=2$ אז $f'(0)=3$

כך (11) \Rightarrow פתור

הצבה נכונה לר $ax+1$ $(a+1)$ \Rightarrow 2 \Rightarrow $a=2$ $m=3$

$$y = 3x+1 \quad ?$$

$$y = \ln(2x^2 - x - 15)$$

$$2x^2 - x - 15 > 0 \quad x_1 = 3 \quad x_2 = -\frac{5}{2}$$

$$x < -\frac{5}{2} \quad x = -\frac{5}{2} \quad x = 3 \quad x > 3$$

$$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24 = 0 \quad x=2 \quad x=4 \quad \text{כך (12) \Rightarrow פתור}$$

$$f''(x) = 6x - 18 \quad f''(2) = -6 \quad f''(4) = 6$$

$$x=4 \quad \text{min}(4:5)$$

$$f(x) = \int (3x^2 - 18x + 24) dx =$$

$$= x^3 - 9x^2 + 24x + C$$

$$f(5) \quad x=4 \quad 64 - 144 + 96 + C = 5$$

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 11$$

$$y_{\min} = 9$$

הצבה נכונה לר $ax+1$ \Rightarrow 2 \Rightarrow $a=2$ $m=3$

$$C = -11$$

$$f(2) = 8 - 36 + 48 - 11 = 9$$