תאריך הבחינה: 31.1.2018
שם המורה: ד"ר יגאל טור.
מבחן ב-שיטות כמותיות בניהול.
מס' הקורס: 4-681-1-0101
מיועד לתלמידי: ניהול
שנה א. סמסטר: א'. מועד א'.
משך הבחינה: 3 שעות.
חומר עזר: מותר.

מס' נבחן:__________.

יש לענות על עשר מתוך שתים-עשרה השאלות.
השאלות שוות בערכן.אם יש מספר סעיפים-ערכם שווה.
אין לענות על יותר מעשר שאלות.
בהצלחה!

1. נתונה הפונקציה $f(x) = \ln(6-3x)$.

א. האם הפונקציה מוגדרת בנקודות $x = e$ ו $x = \frac{e}{2}$?

ב. האם הפונקציה עולה או יורדת בנקודות הנזכרות?

ג. הראה כי לפונקציה זו אין נקודות קיצון, וקבע אם היא עולה או יורדת בתחום הגדרתה .

2. א. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x) = x\,e^{x}$, ותן דוגמא לשיפוע בנקודה אחת בכל תחום.

ב. מצא את תחומי הקמירות והקעירות של פונקצייה זו.

ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקצייה.

3. מחירו של מוצר הוא קבוע בשוק – 8 שקלים ליחידה.
אם מייצרים x יחידות- עלות הייצור הכוללת עבור x היחידות היא $C(x) = 0.02x^2+0.6x+12$.
מעוניינים ברווח מקסימלי.

א. מצא את הכמות האופטימלית לייצור.

ב. מצא את הרווח המקסימלי.

4. א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקצייה $y=.\sqrt{x^2-8x+40}$ בנקודה $x=3$.

ב. מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $y=\ln(x^2-6x+10)$,. וקבע אם היא נקודת מינימום או מקסימום בצירוף נימוק.

5. א. מצא את % הפחת השנתי של פריט ציוד, אם במשך 7 שנים הוא מאבד מחצית מערכו,

ב. אם אוכלוסייה בת 130000 נפש מתרבה בקצב שנתי קבוע של 2.3% לשנה, מצא כמה שנים ייקח לה להגיע ל-180000 נפש.

6. נתונה הפונקציה $\frac{e^{x}}{1+x}$.

א. מצא את נקודת אי ההגדרה.

ב. מצא את נקודות החיתוך של הפונקצייה עם הצירים, אם יש כאלה.

ג. מצא את נקודות הקיצון.

ד. מצא את תחומי העלייה והירידה.

ה. מצא את כל האסימפטוטות של הפונקצייה

ו. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

7. נתונה הפונקציה $y = \frac{x^2}{x^2-4}$

א. מצא את נקודות אי ההגדרה.

ב. מצא את נקודות הקיצון.

ג.. מצא את תחומי העלייה והירידה.

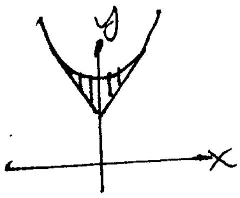
ד. מצא את האסימפטוטות של גרף הפונקציה.

ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

8. א. ישר המקביל לישר $y = 5x - 3$ משיק לגרף הפונקציה $y = x^2 - x + 1$.
מצא את ערכו של y בנקודת ההשקה.

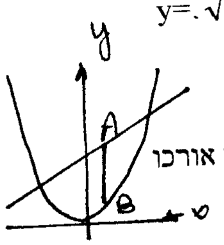
ב. ישר משיק בנקודה $A(a:b)$ לעקום $y = \frac{x+2}{x-2}$. נתון שהישר הזה מאונך לישר $y = x+2$.
מצא את ערכו של a בנקודת ההשקה.($a\neq 0$).

9. נגזרתה של פונקציה היא $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$ וערכה המינימלי 9.
מצא את ערכה של הפונקציה בנקודת המקסימום המקומית.



10. מצא את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $y = x^2 + 10$ והקווים המשיקים לגרף הפונקציה בנקודות $x = 1$ ו $x = -1$ (ר. ציור)

11. א. מצא את תחום ההגדרה ,את נקודת הקיצון ואת תחום העלייה של הפונקצייה $y = \sqrt{x^2 - 6x + 13}$.



ב. הנקודה A נמצאת על הישר $y=2x+3$, והנקודה B נמצאת על $y=x^2$.
הקטע AB מקביל לציר y , ונמצא בין שתי נקודות החיתוך של הפונקציות
מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודות A ו-B , כדי שאורך הקטע AB יהיה מקסימלי, ומהו אורכו המקסימלי.

12. מצא את שיעורי נקודות המינימום או המקסימום (אם הן קיימות) של הפונקציות

א. $y = x\,e^{1/x}$ ב. $y = x^2 \ln x$.

<u>בהצלחה</u>

פתרון המבחן במטלה במתמטיקה

מועד ב' – קמפוס אולם גמלת'

שאלה ①

$y=\ln(6-3x)$

א. תחום $6-3x>0$ $\quad x<2$

א. $x=e$ הפונקציה לא מוגדרת

ב. $x=\frac{e}{2}$ הפונקציה מוגדרת

ב. בנקודה $x=e$ אין לדבר על עליה או ירידה

אם $x=\frac{e}{2}$

$y'=\frac{-3}{6-3x}<0$

ולכן הפונקציה יורדת

ג. לפי השאלה ב' היא עולה לכל x עבור שהפונקציה יורדת לכל x בתחום ההגדרה. אין לה נקודת קיצון

$0 \neq -3$

שאלה ② א

$f(x)=xe^x$

$y'=e^x+xe^x=e^x(x+1)$

תחום עליה $x+1>0$ $\quad x>-1$ תחום ירידה $x<-1$

$f'(0)=1$

$f'(-2)=-e^{-2}$

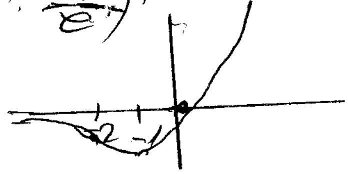
ב. $f''(x)=e^x(x+1)+e^x=e^x(x+2)>0$

תחום קעירות $x>-2$ תחום קמירות $x<-2$

נקודת קיצון $\min(-1;-\frac{1}{e})$

נקודת פיתול $(-2;-\frac{2}{e^2})$

ג. חותך את הצירים $(0;0)$



שאלה ③ א

$z=8x-0.02x^2-0.6x-12$

$z'=8-0.04x-0.6=0 \qquad x=\frac{7.4}{0.04}=\underline{185}$

$z''=-0.04<0\,(\max)$

ב

$z_{\max}=8\times185-0.02\times185^2-0.6\times185-12$

$\underline{=672.5}$

שאלה ④ א. $x_1=3$ $y_1=5$

$y=\sqrt{x^2-8x+40}$

$y'=\frac{2x-8}{2\sqrt{x^2-8x+40}}$ $f'(3)=\frac{-2}{2\cdot 5}=-\frac{1}{5}$

$y-5=-\frac{1}{5}(x-3)$

$5y-25=-x+3$ $\underline{x+5y=28}$

ב.

$y=\ln(x^2-6x+10)$ $y'=\frac{2x-6}{x^2-6x+10}=0$

$x=3$ $y''=2>0$ $\underline{min(3;0)}$

שאלה ⑤ א.

$q^7=\frac{1}{2}$ $q=\sqrt[7]{\frac{1}{2}}=0.905$

$\underline{p=-9.5\%}$ אחוז ירידה

ב. $15000=13000\ q^7$ $q=\sqrt[7]{\frac{15}{13}}=1.029$

2.9%

$16000=13000\cdot 1.029^x$

$x=\frac{\ln(\frac{16}{13})}{\ln 1.029}=\underline{11.38}$ שנ'

שאלה ⑥ א. $x\neq -1$

$y=\frac{e^x}{1+x}$

ב. $y=0$ אין פתרון, ולא חותך את ציר x.

$x=0$ $y=1$ חותך את ציר y בנקודה $(0;1)$

ג. $y'=\frac{e^x(1+x)-e^x}{(1+x)^2}=\frac{xe^x}{(1+x)^2}=0$ $x=0$

$y''=1$ עולה חותך את ציר y: $min(0;1)$

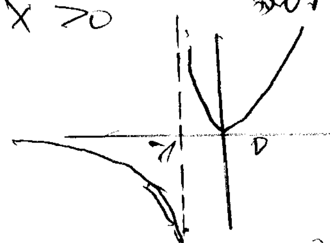
$x>0$ עולה, יורדת $-1<x<0$

$x<-1$

ד. אסימפטוטות:

ה. אסימפטוטות.

$x=-1$ אנכית $y=0$ אופקית משמאל



שאלה 7

$$y=\frac{x^2}{x^2-4}$$

א. $x^2-4\neq 0$ $\quad x=\pm 2$

ב. $$y'=\frac{2x(x^2-4)-2x^3}{(x^2-4)^2}=\frac{-8x}{(x^2-4)^2}$$ $\quad y''=-8$

$max(0;0)$

ג. עולה אם $-8x>0$ $\quad x<0$ $\quad -2<x<0$ או $x<-2$

יורדת אם $-8x<0$ $\quad 0<x<2$ או $x>2$

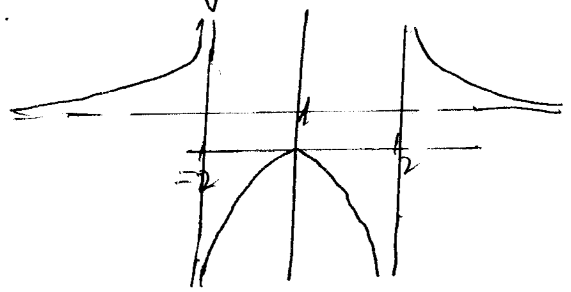
3. $x=2$ $\quad x=-2$ אס' אנכית

אס' אופקית $$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^3-4x}=0$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-4}=1$$

$y=1$

ה.



שאלה 8

א. $y=x^2-x+1$ $\quad y'=2x-1=5$

$x=3$

$y=f(3)=9-3+1=7$ $\quad (3;7)$

ב. $$y=\frac{x+2}{x-2}\qquad y'=\frac{1(x-2)-1(x+2)}{(x-2)^2}=\frac{-4}{(x-2)^2}=-1$$

$x^2-4x+4=4$ $\quad \cancel{x_1=0}$ $\quad x_2=4$

$x(x-4)=0$

$a=4$

שאלה 9

$y'=6x^2-18x+12=0$ $\quad x_1=1$ $\quad x_2=2$

$y''=12x-18$ $\quad f''(1)=-6$ $\quad f''(2)=6$

$(2;9)$ עבור מינימום

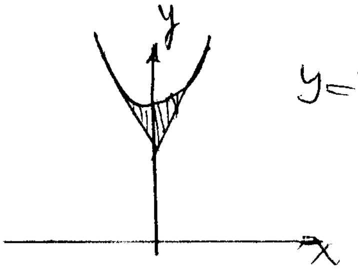
$9=16-36+24+c$ $\quad c=5$

$y=2x^3-9x^2+12x+5$

$f(1)=2-9+12+5=10$ $\quad$ עבור מקסימום

שאלה 10

א. משוואת המשיק:



$y=x^2+10$

$y'=2x \quad x_1=1 \quad m=2$

$y-11=2(x-1)$

$\underline{y=2x+3}$

נחשב מחצית השטח

$$\frac{1}{2}S=\int_0^1 (x^2-2x+1)dx=\int(x-1)^2dx=\frac{(x-1)^3}{3}\Big|_0^1=0-\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$$

$x^2+10-(2x+3)=x^2-2x+1$

$\underline{S=\frac{2}{3}}$ השטח המבוקש הוא

שאלה 11 א.

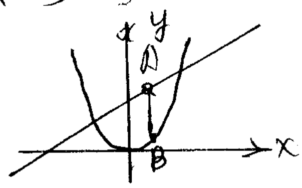
$y=\sqrt{x^2-6x+13}$

$$y'=\frac{2x-6}{2\sqrt{x^2-6x+13}}=0 \qquad x=3$$

תחום הגדרה $x\in R$ כי למשוואה $x^2-6x+3=0$ אין פתרונות.

תחום עליה $2x-6>0$ תחום $x>3$ וירידה $x<3$.

ב.



$z=2x-3-x^2$

$z'=2-2x=0 \qquad \underline{x=1}$

$A(1;5) \qquad B(1;1)$

$z_{max}=4$

שאלה 12 א.

$y=xe^{\frac{1}{x}}$

$$y'=1\cdot e^{\frac{1}{x}}-\frac{1}{x^2}\cdot xe^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}}\left(1-\frac{1}{x}\right)=0 \qquad x=1$$

$y''=\frac{1}{x^2}>0 \qquad \underline{min(1;e)}$

ד.

$y=x^2\ln x \qquad y'=2x\ln x+\frac{x^2\cdot 1}{x}=x(2\ln x+1)=0$

$\ln x=-\frac{1}{2} \qquad x=e^{-1/2}=\frac{1}{\sqrt{e}} \qquad y''=\frac{2}{x}>0$ (min) כי $x>0$

$$y_{min}=\frac{1}{e}\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{-1}{2e} \qquad min\left(\frac{1}{\sqrt{e}};\frac{-1}{2e}\right)$$