

# מציאת קבוע קפיץ במכניזם פיקות

מכונות 2

13/02/2013

Ben Gurion University

Isaac Maman

## הוראות בטיחות:

- המעבדות הן שטח תפעולי המשופע בעצמים חמים וזרמי חשמל גבוהים.
- מותר לסטודנטים לעבוד במעבדה רק כאשר נמצא במקום עובד מסגל המעבדה ו/או מדריך מוסמך אשר מודע לניסוי אותו הם מבצעים.
- אין להכניס למעבדה מזון ושתייה. אין לאכול, לשתות או לעשן במעבדה. אסור להשתמש בטלפונים סלולריים בתוך המעבדה (המעבדה היא שיעור לכול דבר)
- לבעלי שיער ארוך- חובה לאסוף את השער בכניסה לכל חדר מעבדה או ניסוי ולהכניס מתחת לחולצה
- אין לעבוד עם שרוולים ארוכים ולא רכוסים ו/או בגדים רפויים
- סטודנט שלא יגיע עם נעליים סגורות-היינו נעליים סגורות באופן מלא גם מלפנים (אצבעות רגליים) וגם מאחור (קרוסול חשוף) לא יוכל לבצע המעבדה ולא יקבע לו שיבוץ מחדש. הערה- אין להגיע עם נעלי "CROCS" למעבדות
- בכל מקרה של ספק או חשש בהפעלה של מערכת הניסוי יש להתייעץ עם המדריך או איש הסגל האחראי. חל איסור חמור על הפעלת מערכות ניסוי ללא אישור טכנאי או מדריך ו/או במידה ויש ספק או חשש.
- לא יקבע מועד שיבוץ חדש לסטודנט אשר לא ימלא חובות אלו

- חל איסור על הישענות על קונסטרוקציית המתכת.
- הקפד על סביבת עבודה נקייה- ציוד שאינו בשימוש, החזר אותו למקומו.
- אל תכניס ידים או כלים לא נחוצים למכלול כשהוא במנוחה- כל צשכן כאשר הוא בתנועה
- הרחק את הראש והשער מהכלול בעת פעולה
- לא יודע כיצד להפעיל? קרא למדריך או טכנאי.

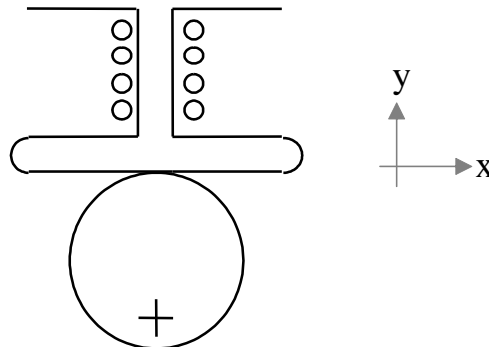
## מציאת קבוע קפיץ במכניזם פיקות

### 1. מטרת הניסוי

תוגדר ע"י הסטודנט.

### 2. רקע תיאורטי

#### (2.1) עוקב קווי



איור 1 – מערכת פיקה ועוקב קווי

במערכת המכילה מכניזם פיקות קיימת סכנת ניתוק מגע בין העוקב והפיקה. עבור המערכת המתוארת באיור 1 קיימת סכנת ניתוק מגע בזמן שתאוצת העוקב מקבלת ערך שלילי, כלומר בזמן תאוצת העוקב כלפי מעלה (בכיוון החיובי של מערכת הצירים) או בזמן תאוצתו כלפי מטה (בכיוון השלילי). ניתוק זה יקרה אם כוח ההתמדה  $ma$  יהיה גדול בערכו המוחלט ממשקל העוקב פלוס (או מינוס בהתאם לכיוון) כל עומס חיצוני.

$$|ma| \geq |mg \pm F| \quad (2.1.1)$$

כאשר  $F$  הוא העומס החיצוני.

מאחר שכיוון  $mg$  הוא כלפי מטה, ערכו שלילי, והתנאי לניתוק העוקב מהפיקה הוא

$$ma \leq -mg \pm F \quad (2.1.2)$$

וללא עומס חיצוני התנאי לניתוק

$$ma \leq -mg \quad (2.1.3)$$

על מנת למנוע את ניתוק המגע, יש להוסיף קפיץ מתאים. הקפיץ מגדיל את החיכוך בין הפיקה והעוקב ולכן יש חשיבות רבה לקביעה מדויקת של כוח הקפיץ הנדרש כדי למנוע כוח קפיץ גדול מדי.

את קבוע הקפיץ הדרוש ניתן לקבוע באופן גרפי כמתואר באיור 2 לפי השלבים הבאים:

1. בונים טבלה של תזוזות העוקב,  $S$  כפונקציה של זווית הפיקה,  $\theta$ . נקודת הראשית של הדיאגרמה היא הנקודה שבה העוקב נמצא בגובה הנמוך ביותר שלו (עבורו נבחר  $S=0$ ) ומעבר לה העוקב יכול רק לעלות (כלומר  $S$  מקבל ערך חיובי בלבד).

2. מבצעים גזירה נומרית כפולה לקבלת דיאגרמת תאוצת העוקב,  $a$  כפונקציה של תזוזתו,  $S$ . כך ש,

$$S = f(\theta) \quad (2.1.4)$$

כאשר הזווית שהפיקה מבצעת בזמן  $t$  תלויה במהירות המנוע לפי  $\theta = \omega \cdot t$ . נגזרת ראשונה של תזוזת העוקב בזמן תיתן את מהירותו

$$v = \frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} = \omega \frac{\partial S}{\partial \theta} \quad (2.1.5)$$

ונגזרת שנייה את תאוצתו

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \omega \frac{\partial S}{\partial \theta} \right) = \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \omega \frac{\partial S}{\partial \theta} \right) \frac{d\theta}{dt} = \omega^2 \frac{\partial^2 S}{\partial \theta^2} \quad (2.1.6)$$

כאשר את הנגזרת השנייה של  $f$  מקרבים ע"י נגזרת נומרית מרכזית בהפרשים סופיים:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \theta^2} \cong \frac{S_{i+1} - 2S_i + S_{i-1}}{(\Delta\theta)^2} + o(\Delta\theta^2) \quad (2.1.7)$$

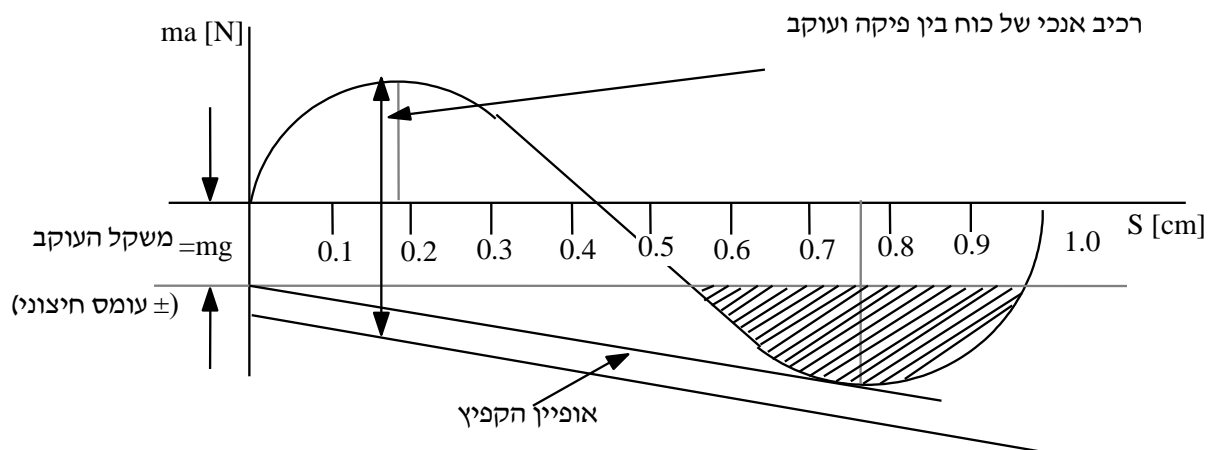
כלומר, בהצבת ערכי  $S$  שבנקודה ה- $(i)$ , ה- $(i-1)$  וה- $(i+1)$  ניתן למצוא את ערך התאוצה  $a$  בנקודה ה- $(i)$ .

3. משרטטים גרף של שקול הכוחות,  $ma$  כפונקציה של התזוזה,  $S$ .

4. מאחר שהתנאי לניתוק בין הפיקה והעוקב (בהזנחת העומס החיצוני), על פי משוואה (2.1.3), הוא שכח ההתמדה  $ma$  יהיה קטן מ- $(-mg)$ , בכל האזור שבו עקומת הגרף  $ma-S$  נופלת מתחת לציר אופקי שערכו  $-mg$  נקבל ניתוק, כיוון שכוח הכובד לא יספיק להבטיח מגע בין הפיקה לעוקב. לכן יש להוסיף כוח קפיץ שיבטל את מרחק העקומה מתחת מתחת לציר אופקי זה.

אופיין הקפיץ בדיאגרמה  $ma-S$  יהיה קו ישר שיעבור דרך הנקודה בה הציר האופקי  $(-mg)$  חותך את ציר ה- $ma$  ומשיק לחלק העקומה הנמצא מתחת לציר האופקי. השיפוע  $K = \Delta F / \Delta S$  של ישר זה נותן את קבוע הקפיץ המינימלי הדרוש.

5. רצוי לתת לקפיץ קצת כוח מוקדם (כלומר מורידים מעט את הקו) על מנת לקבל מקדם בטחון מסוים ולהבטיח שהקפיץ ימצא בלחיצה גם עבור  $S=0$ .



איור 2 - קביעת קבוע הקפיץ למניעת ניתוק המגע בין פיקה ועוקב קווי

באיור 2, המרחק בין אופיין הקפיץ והעקום  $ma$  נותן את הרכיב האנכי של הכוח הפועל בין הפיקה והעוקב. רכיב זה מורכב משלושה רכיבים :

(א) כוח ההתמדה  $ma$  של העוקב .

(ב) משקל העוקב פלוס עומס חיצוני כלפי מטה.

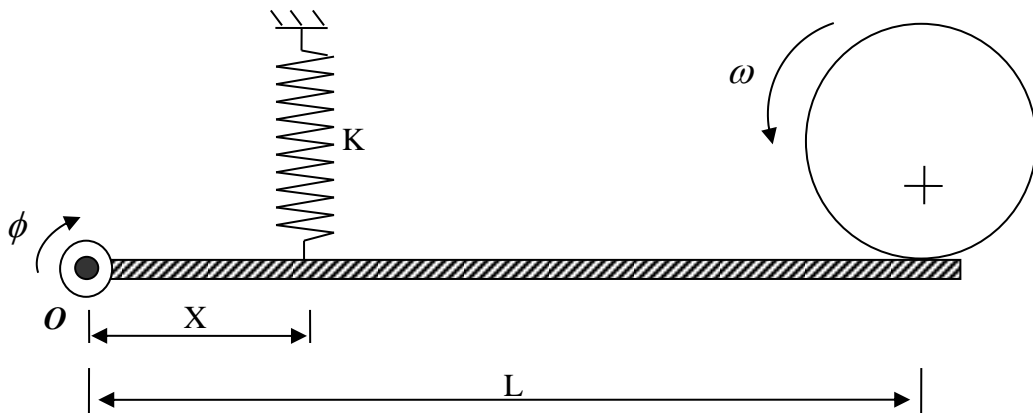
(ג) כוח הקפיץ.

## 2.2 עוקב זוויתי – שלבי הניסוי

במכניזם שתואר בפסקה 2.1 העוקב קווי. במערכת הניסוי המתוארת באיור 3 העוקב זוויתי, כלומר הוא מסתובב סביב ציר קבוע אליו הוא מחובר בקצהו האחד. אופן מציאת קבוע הקפיץ עבור מערכת זו דומה לזה של עוקב קווי כאשר יש לבצע מעבר של הגדלים המאפיינים תנועה קווית לתנועה סיבובית על פי הטבלה הבאה :

קווי	זוויתי
$S$	$\phi$
$a$	$\alpha$
$m$	$I$
כוח	מומנט

מערכת הניסוי באיור 3 כוללת פיקה אקסצנטרית, מאוזנת המחוברת לציר מנוע חשמלי. הפיקה מניעה עוקב שבקצהו ציר סיבוב. הקפיץ ניתן להזזה אנכית ועל ידי כך אפשר להגדיל או להקטין את מתיחותו ההתחלתית. הקפיץ מבטיח מגע רציף בין הפיקה והעוקב. סכנת ניתוק מגע בין הפיקה והעוקב קיימת כאשר מומנט ההתמדה,  $I\alpha$  גדול בערכו מהמומנט הנגרם על ידי משקל העוקב פלוס (או מינוס בהתאם לכיוון) המומנט הנגרם על ידי עומס חיצוני הפועל על העוקב.



איור 3 – מערכת פיקה ועוקב זוויתי

הכוחות הגורמים למומנט בעוקב סביב נקודה  $O$  הם כוח הקפיץ המורכב מכוח סטטי  $Fi$  כאשר הקפיץ במצבו הרפוי ביותר ( $\phi=0$ ), וכוח נוסף כתוצאה ממתחת הקפיץ בשיעור  $y$ . בהנחת זוויות קטנות  $\phi \cong tg\phi = y/X$  ומכאן גודל הכוח  $Ky \cong K\phi X$ . בנוסף לכוח הקפיץ פועל גם כוח נורמלי  $N$  המופעל על ידי הפיקה וכוח הגוף של העוקב  $mg$ .

אם כך, משוואת המומנטים  $\sum_i M_i = I\alpha = I\ddot{\phi}$  עבור מערכת הניסוי

$$-(F_i X + K\phi X^2) + mgL/2 + NL = I\ddot{\phi} \quad (2.2.1)$$

כאשר  $\alpha = \ddot{\phi}$  היא התאוצה הזוויתית של העוקב ו-  $I = \frac{1}{3}mL^2$  הוא מומנט האינרציה הדינמי של העוקב סביב קצהו.

במצב של ניתוק מתקיים  $N = 0$ . עבור מצב זה מתוך משוואה (2.2.1) נקבל

$$K = \frac{-F_i X + mgL/2 - I\ddot{\phi}}{X^2\phi} \quad (2.2.2)$$

על מנת למצוא את קבוע הקפיץ המינימלי, עבור מהירות זוויתית  $\omega$  נתונה, שימנע ניתוק יש למצוא את הכוח ההתחלתי  $Fi$  של הקפיץ ואת התאוצה הזוויתית  $\ddot{\phi}$  של העוקב כתלות בזווית  $\phi$ .

#### א) מציאת הכוח $Fi$ :

נעמיס באופן סטטי את העוקב, במצב הכי רפוי שלו, במשקולות ( $Mg$ ) בקצהו עד לקבלת התנתקות. במצב זה משוואת המומנטים על העוקב תהיה

$$-F_i X + mgL/2 + MgL = 0 \quad (2.2.3)$$

או

$$-F_i X + mgL/2 = -MgL \quad (2.2.4)$$

כלומר עבור משוואה (2.2.1) במצב של ניתוק מתקיים

$$-KX^2\phi - MgL = I\ddot{\phi} \quad (2.2.5)$$

ולכן ניתן לרשום את קשר (2.2.2) בצורה הבאה

$$K = \frac{-MgL - I\ddot{\phi}}{X^2\phi} \quad (2.2.6)$$

#### ב) חישוב $\ddot{\phi}$ ייעשה באמצעות הפרשים סופיים:

באופן כללי במערכת פיקה ועוקב, זווית העוקב היא פונקציה של זווית הפיקה  $\theta$  כך ש

$$\phi = f(\theta) \quad (2.2.7)$$

כאשר הזווית שהפיקה מבצעת בזמן  $t$  תלויה במהירות המנוע לפי  $\theta = \omega \cdot t$ . נגזרת ראשונה של זווית העוקב בזמן תיתן את המהירות הזוויתית שלו

$$\dot{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \omega \quad (2.2.8)$$

ונגזרת שנייה את תאוצתו הזוויתית

$$\ddot{\phi} = \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial t} = \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \omega \right) \omega = \omega^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \quad (2.2.9)$$

מאחר שלא נתונה לנו פונקציה אנליטית של זווית העוקב כתלות בזווית הפיקה, נבצע דיסקרטיזציה לפונקציה  $f$  ע"י קביעת זוויות הפיקה ומדידת זווית העוקב בהתאם  $\phi_i = f(\theta_i)$ . בצורה זו ניתן לחשב הנגזרת השנייה של  $f$  לפי נגזרת מרכזית בהפרשים סופיים:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \cong \frac{\phi_{i-1} - 2\phi_i + \phi_{i+1}}{(\Delta\theta)^2} + o(\Delta\theta^2) \quad (2.2.10)$$

הניסוי יבוצע בצורה הבאה - נקבע את  $\Delta\theta$  זווית הסיבוב של הפיקה ל-  $20^\circ$  (או  $\pi/9$  ברדיאנים), עבור כל  $\theta$  נמדוד את שקיעת העוקב  $h$ , נחשב את  $\phi$  לפי  $\phi \cong h/L$  (בהנחת זוויות קטנות) ואת  $\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}$  לפי ביטוי (2.2.10).

### ג) קבוע הקפיץ ימצא באופן גרפי לפי השלבים הבאים:

1. בונים טבלה של זווית העוקב,  $\phi$  כפונקציה של זווית הפיקה,  $\theta$ . כאשר נקודת הראשית היא הנקודה שבה קצה העוקב נמצא ברמה הנמוכה שלו ומעבר לה העוקב יכול רק לעלות.
2. מבצעים גזירה נומרית כפולה של  $\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}$  לקבלת דיאגרמת  $\phi \leftrightarrow \ddot{\phi}$ .
3. משרטטים גרף של  $I\ddot{\phi}$  כפונקציה של  $\phi$ . צד שמאל של משוואה (2.2.5) הנו משוואת קו ישר עם שיפוע  $-KX^2 - MgL$  ונקודת חיתוך  $-MgL$  עם ציר  $I\ddot{\phi}$ . הערך של  $K$  אותו אנו מחפשים יתקבל עבור הישר המשיק לנקודת המינימום המוחלט של העקומה  $I\ddot{\phi}$ . במקביל ניתן למצוא ערך זה על ידי מציאת  $K(\phi)$  המקסימלי.

### 3. משימות

- א. הצג טבלה בה יופיעו מדידות הניסוי והחישובים הדרושים לבניית העקומה  $I\ddot{\phi} \leftrightarrow \phi$ .
- ב. הראה דוגמת חישוב לטבלה.
- ג. מדוד את המהירות הזוויתית של הפיקה בה יש ניתוק ראשוני.
- ד. העמס את העוקב באופן סטטי, במצב הכי רפוי שלו, במשקולות בקצהו עד לקבלת התנתקות ומדוד את  $M$ .

- ה. שרטט גרף כמותואר בסעיף ג) בפסקה 2.2.  
ו. חשב את קבוע הקפיץ.  
ז. רשום מסקנותיך מהניסוי.

גדלים בניסוי:

מסת העוקב הינה  $m = 0.88[kg]$  ואורכו  $L = 0.33[m]$ , כמו כן  $X = 0.13[m]$ .

תמונה של מערכת הניסוי

