

פיתול מוטות

ניסוי בפיתול מוטות

13/09/2012
Ben Gurion University
KSHARIM

1. המעבדות הן שטח תפעולי המשופע במכלולים נעים, עצמים חמים וזרמי חשמל גבוהים.
2. מותר לסטודנטים לעבוד במעבדה רק כאשר נמצא במקום עובד מסגל המעבדה ו/או מדריך מוסמך אשר מודע לניסוי אותו הם מבצעים.
3. אין להכניס למעבדה מזון ושתייה. אין לאכול, לשתות או לעשן במעבדה. אסור להשתמש בטלפונים סלולריים בתוך המעבדה (המעבדה היא שיעור לכול דבר).
4. לבעלי שיער ארוך- חובה לאסוף את השער בכניסה לכל חדר מעבדה או ניסוי ולהכניסו מתחת לחולצה.
5. אין לעבוד עם שרוולים ארוכים ולא רכוסים ו/או בגדים רפויים.
6. סטודנט שלא יגיע עם נעליים סגורות- היינו נעלים סגורות באופן מלא גם מלפנים (אצבעות רגליים) וגם מאחור (קרוסול חשוף) לא יוכל לבצע המעבדה ולא יקבע לו שיבוץ מחדש. הערה- אין להגיע עם נעלי "CROCS" למעבדות.
7. בכל מקרה של ספק או חשש בהפעלה של מערכת הניסוי יש להתייעץ עם המדריך או איש הסגל האחראי. חל איסור חמור על הפעלת מערכות ניסוי ללא אישור טכנאי או מדריך ו/או במידה ויש ספק או חשש.
8. אין לכוון את קרן הלייזר על בני אדם. לפני הדלקת קרן הלייזר יש להקפיד כי אף סטודנט לא עומד בינה לבין הלוח.
9. יש להניח את המשקולות בזהירות ולהקפיד שלא יפלו מהשולחן או מהמעמד עליו הן מונחות.

1. מטרת הניסוי

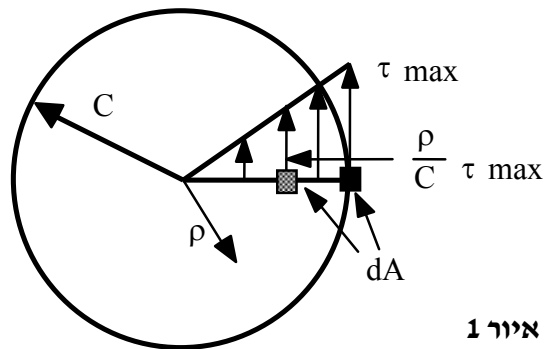
לבדוק את תופעת הפיתול במוט עם חתך עגול מלא ולהשוות את התוצאות הניסיוניות עם התיאוריה.

2. רקע תיאורטימוטות בעלי חתך עגול (מלא או חלול) סגורהנחות יסוד

(א) מישור נשאר מישור אחרי הפעלת המומנט ונשאר מאונך לציר המוט.

(ב) זווית הפיתול של כל חתך סביב מרכזו נמצאת ביחס ישר למרחק החתך מנקודת הקביעה. לחילופין ניתן לומר כי קו רדיאלי ישר נשאר ישר. מכאן ניתן להסיק כי המאמצים והמעוותים במוט מפולגים ליניארית.

(ג). המרחקים בין החתכים השונים אינם משתנים - אורך המוט אינו משתנה כתוצאה מהפיתול.

מאמצי פיתול

$$\tau = \frac{\rho}{c} \tau_{\max}$$

לפי הנחה (ב) יהיה המאמץ במרחק ρ מציר המוט: (1)

τ_{\max} הוא המאמץ על המעטפת החיצונית של המוט.

$$dF = \tau dA$$

הכוח המשיקי הפועל על אלמנט קטן, dA , של חתך המוט: (2)

$$dT = \rho \cdot dF = \tau \rho dA$$

המומנט הפנימי של הכוח המשיקי לגבי ציר הסיבוב יהיה: (3)

סכום המומנטים הפנימיים הפועלים על כל שטח החתך שווה למומנט הפיתול החיצוני T :

$$T = \int_A dT = \int_A \frac{\rho}{c} \tau_{\max} \cdot \rho dA = \frac{\tau_{\max}}{c} \int_A \rho^2 dA \quad (4)$$

ערך האינטגרל המתאר את סכום המכפלות של השטחים בריבוע מרחקיהם ממרכז-הסיבוב הוא מומנט האינרציה הפולארי (J).

חתך עגול מלא

$$J = \int_A \rho^2 dA = \frac{\pi c^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}$$

מומנט האינרציה הפולארי עבור חתך עגול מלא הוא: (5)

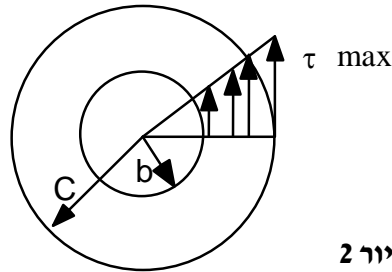
כאשר C ו- d הם רדיוס וקוטר המוט בהתאמה.

$$\tau_{\max} = \frac{Tc}{J} \quad (6) \quad \text{מאמץ הגזירה המכסימלי על פי משוואה (4):}$$

$$\tau = \frac{T\rho}{J}$$

מאמץ הגזירה במרחק ρ מהמרכז, על פי משוואה (1): (7)

חתך טבעתי



איור 2

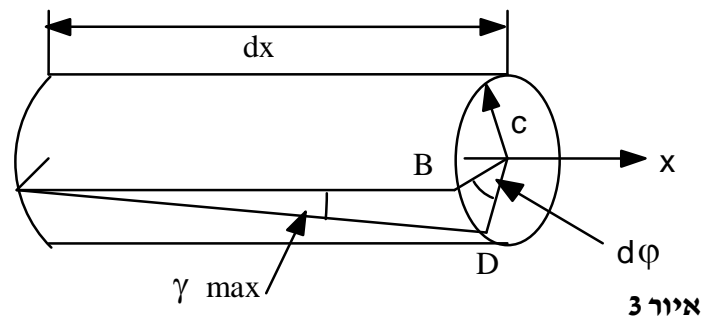
$$J = \frac{\pi}{2}(c^4 - b^4)$$

מומנט האינרציה הפולארי עבור חתך טבעתי הוא: (8)

$$J = 2\pi c^3 t$$

כאשר הדופן דקה מאוד $c - b = t$ או $b \approx c$ נקבל: (9)

זווית הפיתול



איור 3

$$d\phi = \frac{dx \cdot \gamma_{\max}}{c}$$

הקשר הלינארי בין זווית הפיתול וזווית הגזירה נתון: (10)

$$\gamma_{\max} = \frac{\tau_{\max}}{G}$$

על פי חוק הוק γ_{\max} פרופורציוני ל- τ_{\max} לפי: (11)

כאשר G הוא מודול הגזירה.

$$\gamma_{\max} = \frac{Tc}{JG}$$

נציב מתוך משוואה (6) למשוואה (11): (12)

$$\phi = \int_0^x \frac{T(x)}{J(x) \cdot G} dx + C_1$$

ובהצבה למשוואה (10) נקבל ביטוי ל ϕ זווית הפיתול של החתך: (13)

C_1 מבטא את הזווית ההתחלתית של ראשית הצירים אשר ביחס אליה נבדקת זווית- הפיתול.

עבור מוט באורך L , כאשר T ו- J קבועים והזווית ההתחלתית אפס מתקבל

$$\phi = \frac{TL}{JG}$$

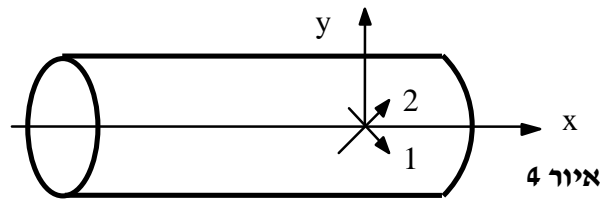
(14)

מאמצים ראשיים בפיתול

למוט הנתון בפיתול נגרמים מעוותים ראשיים בכיוון פעולת המאמצים הראשיים. בהסבר שלהלן יובהר הרקע לחישוב מאמצי-הגזירה וזווית-הפיתול מתוך מדידת המעוותים הראשיים. במצב מאמצים מישורי, המאמצים הראשיים נתונים ע"י המשוואה:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad (15)$$

$$\tan 2\alpha = \frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)/2} \quad \text{כיוון הצירים הראשיים נתון במשוואה : (16)}$$



במקרה של פיתול $\sigma_x = \sigma_y = 0$

$$\sigma_{1,2} = \pm \tau_{xy}$$

המאמצים הראשיים יהיו: (17)

$$\tan 2\alpha \rightarrow \infty \Rightarrow \alpha = 45^\circ \quad \text{וכיוון המאמצים הראשיים בפיתול יהיה: (18)}$$

במישור הנתון למאמצים ראשיים, העיבורים (מעוותים) הראשיים הם:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu\sigma_2) \quad (19)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}(\sigma_2 - \nu\sigma_1)$$

E - מודול יאנג, ν - מקדם פואסון

$$\varepsilon_1 = \frac{\tau}{E}(1 + \nu)$$

בפיתול מתקיים $\sigma_{1,2} = \pm \tau$, לפיכך: (20)

$$\varepsilon_2 = -\frac{\tau}{E}(1 + \nu)$$

כאשר: ε_1 ו- ε_2 הם שיעורי העיבורים בכיווני המאמצים הראשיים σ_1 ו- σ_2 בהתאמה.

$$\tau = G\gamma \quad (21) \quad \text{חוק הוק בפיתול קושר בין מאמץ הגזירה למעוות דרך מודול הגזירה:}$$

τ - מאמץ הגזירה, γ - העיבור (זווית הגזירה), G - מודול הגזירה

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad \text{הקשר בין מודול הגזירה למודול יאנג נתון לפי: (22)}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\tau}{2G} \quad \varepsilon_2 = -\frac{\tau}{2G} \quad \text{בהצבה לביטויים עבור } \varepsilon_1 \text{ ו-} \varepsilon_2 \text{ (20) נקבל: (23)}$$

$$\gamma_{\max} = \gamma|_{\rho=c} = c \frac{d\phi}{dx} = c\theta \quad \text{מתוך משוואה (10), זווית הגזירה היא: (24)}$$

בעזרת משוואה (11) (המתבססת על חוק הוק) ומשוואה (24) נקבל את θ זווית הפיתול ליחידת אורך :

$$\theta = \frac{\gamma}{c} = \frac{2\varepsilon_1}{c} = -\frac{2\varepsilon_2}{c} \quad (25)$$

כאשר c הוא רדיוס-המוט.

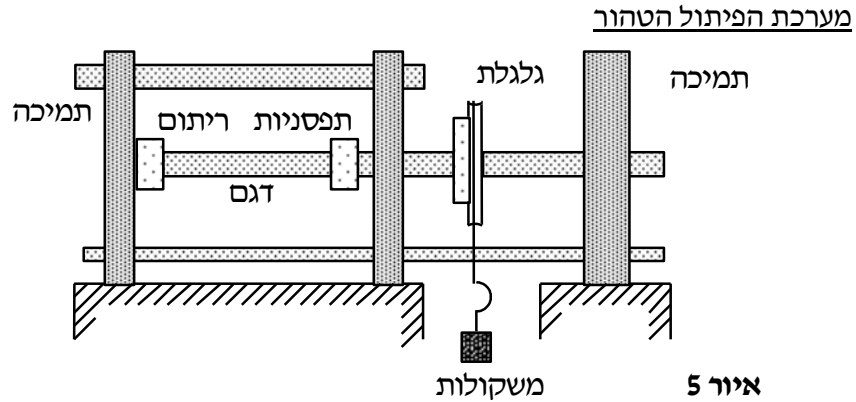
אם יודעים את נתוני המוט (c, G), ניתן על סמך מדידת המעוותים למצוא את המאמץ ואת זווית-הפיתול ליחידת אורך.

3. ספרות

Popov: Introduction to Mechanics of Solids /1968 edition/sections 5-1.-5-7. ,5-12.

4. מערכת הניסוי

בניסוי זה ייבדק פיתול של קורה תחת פיתול טהור ללא מאמצי-גזירה. הדפורמציות במוט ימדדו ע"י מערכת של מדידי עיבור וע"י מערכת של לייזר ומראה כפי שיפורט בהמשך.



ניתן לדפון במתקן זה דגמים באורכים של עד 110 ס"מ. קוטר הגלגלת הוא 300 מ"מ, והמומנט המופעל על הדגם הוא לפיכך: $T = 15 \cdot W \text{ [kg} \times \text{cm]}$ כאשר W - משקל המשקולות

חנת עגול מלא

החומר: אלומיניום (T_3) 2024 אורך: 100 ס"מ קוטר: 16 מ"מ

מודל הגזירה: $G = 2.92 \cdot 10^5 \text{ [kg / cm}^2 \text{]}$ מאמצי הכניעה: $\sigma_{yp} = 3440 \text{ [kg/cm}^2 \text{]}$

$\tau_{yp} = 1900 \text{ [kg/cm}^2 \text{]}$

מערכות המדידה

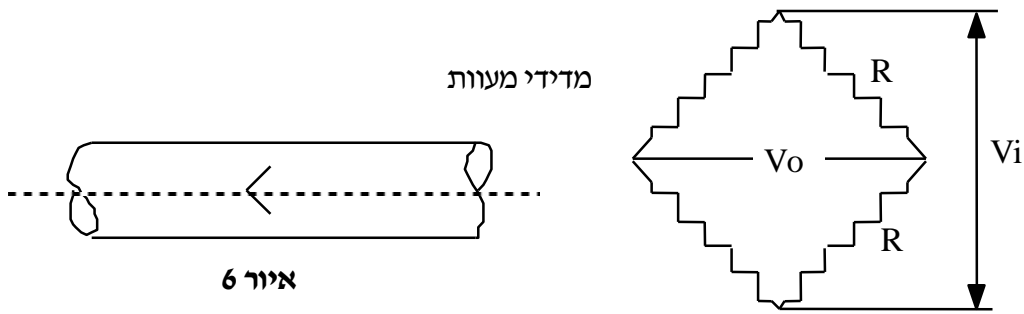
מדידי עיבור:

על הדגם העגול המלא שבניסוי הפיתול-טהור מודבקים בשני מקומות שני מדידי עיבור בזווית של 90° זה

ביחס לזה, ובזווית של 45° לציר הדגם (כיווני המאמצים/ מעוותים הראשיים). זוג המדידים מחוברים

בחיבור "חצי-גשר" למכשיר למדידת המעוותים כאשר שני המדידים פעילים. גורם הגשר יהיה, לפיכך 2

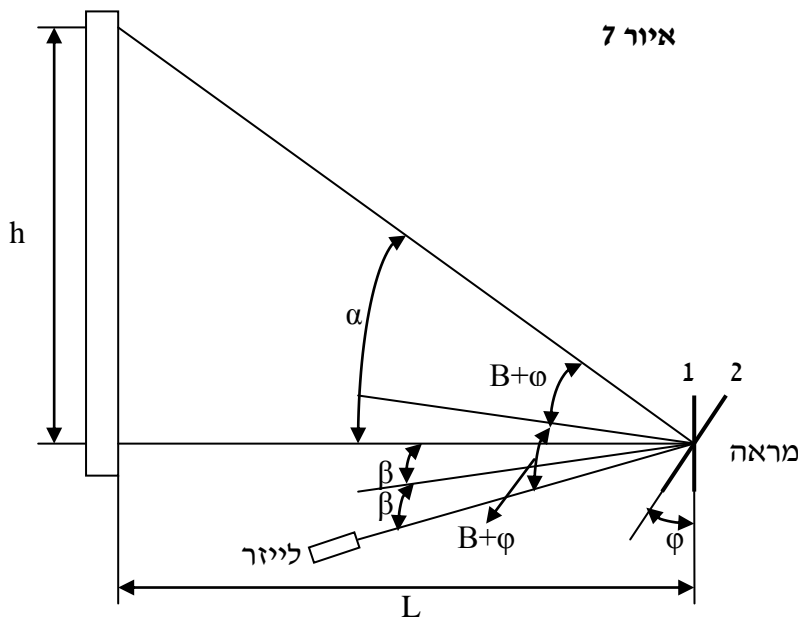
ובכדי לקבל את המעוות האמיתי יש לחלק את קריאת המכשיר בגורם הגשר.



איור 6

מערכת לייזר מראה למדידת זווית הפיתול

מדידת זווית הפיתול נעשית בעזרת מדידת ההסטה של קרן לייזר על ידי מראות הצמודות לדגמים. כדי לקבל קרן מרוכזת נשתמש במכשיר לייזר בעל הספק נמוך.



איור 7

L - המרחק מהמראה למסך

h - שינוי גובה פגיעת הקרן במסך

φ - זווית הפיתול

β - זווית הפגיעה/החזרה במצב 1 (ללא עומס על המוט)

α - הזווית המייצגת את השינוי במיקום פגיעת קרן הלייזר לפני ואחרי הפעלת העומס

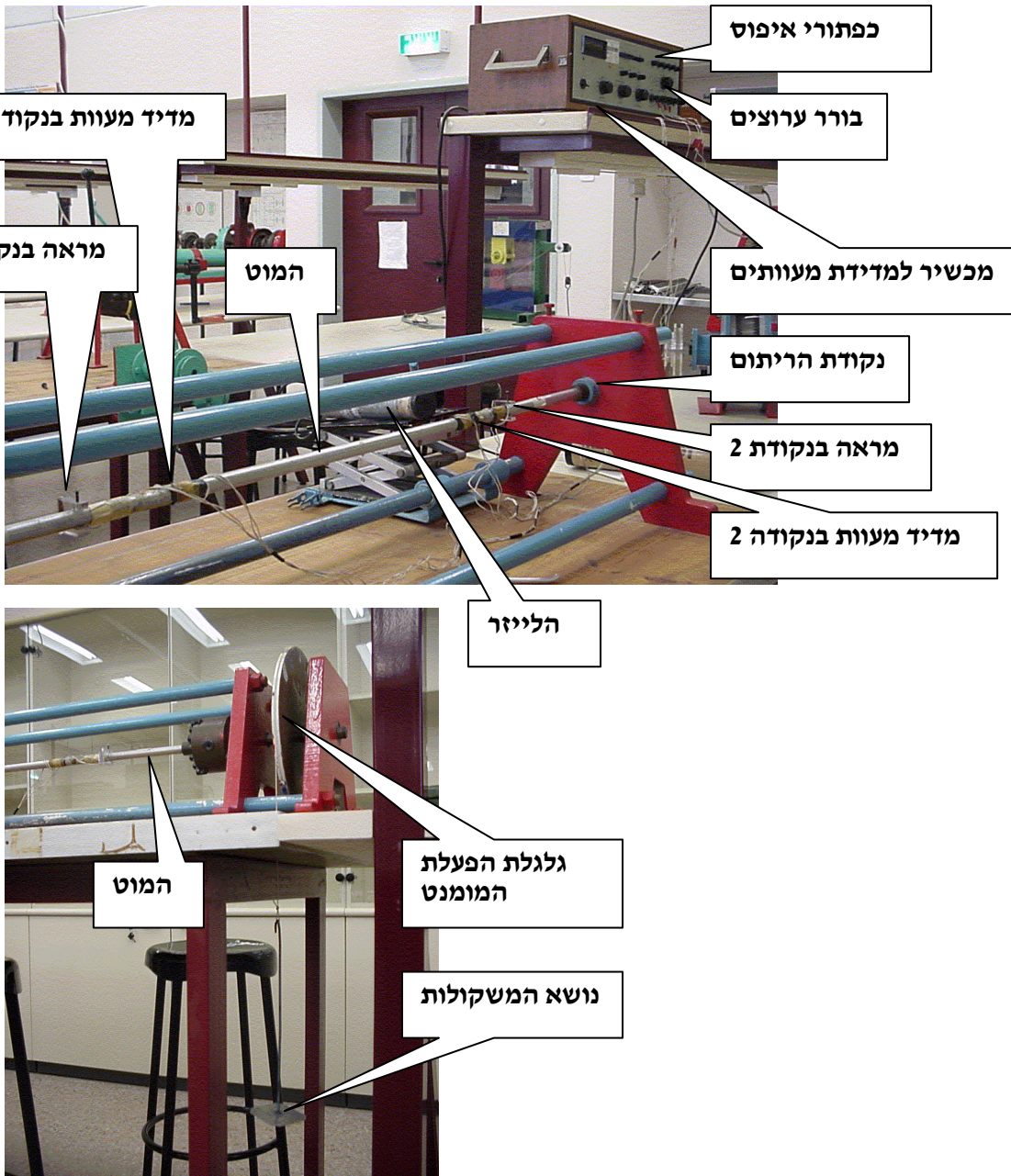
זווית הפגיעה/החזרה של הלייזר מן המראה שעל המוט משתנה בהתאם לשינוי בזווית הפיתול. מתוך

התרשים ניתן לראות את כי השינוי בין מצב 1 למצב 2 של המראה/המוט ניתן להביע ע"י:

$$\alpha = \beta + \varphi + \beta + \varphi - 2\beta = 2\varphi$$

$$\alpha \cong \frac{h}{L} = 2\varphi$$

$$\varphi = \frac{h}{2L} [\text{rad}]$$



5. שאלות הכנה

1. מהן ההנחות הבסיסיות של תורת הפיתול של מוטות עגולים ?
2. מהן זווית הגזירה וזווית הפיתול ומה הקשר ביניהן ? (את ההסבר תן בעזרת שרטוט סכמתי לשתי הזוויות).
3. הסבר כיצד נמדדת זווית הפיתול בשתי השיטות .
4. על סמך תמיכת המוטות והפעלת המומנט, האם ניתן להזניח את הכפיפה במוטות ? הסבר .
5. עבור המוט העגול המלא פתח נוסחאות-עבודה לחישוב מאמצי הגזירה וזווית הפיתול התיאורטיים כפונקציה של העומס במשקולות, ולחישוב מאמצי-הגזירה וזווית הפיתול הניסיוניים כפונקציה של העיבור הנמדד .

6. שאלות מקדימות:

- איך משתנה זווית הפיתול לאורך המוט ?
- איך משתנה זווית הגזירה לאורך המוט ?
- איך משתנה זווית הפיתול ליחידת אורך לאורך המוט ?
- איך משתנה מאמץ הגזירה לאורך המוט ?
- איזו שיטת מדידה תהיה מדויקת יותר בעזרת מדידי העיבור או בעזרת קרן הלייזר ?
- היכן יהיה מומנט פיתול גדול יותר קרוב לנקודת הפעלת הכוח או בריתום ?

7. מהלך הניסוי:

- המוט שלפנינו הוא מוט אלומיניום בעל חתך מלא הרתום בצידו הימני.
- מדוד את מרחק המראות מהריתום (החלק הצבוע אדום), קוטר המוט ורדיוס גלגלת המומנט.
- הדלק את מכשיר מדידת המעוותים ואת הלייזר. ודא שאתה בערוץ המתאים לנקודת המדידה 1 או 2 ושאתה מזהה את נקודת הלייזר על הלוח.

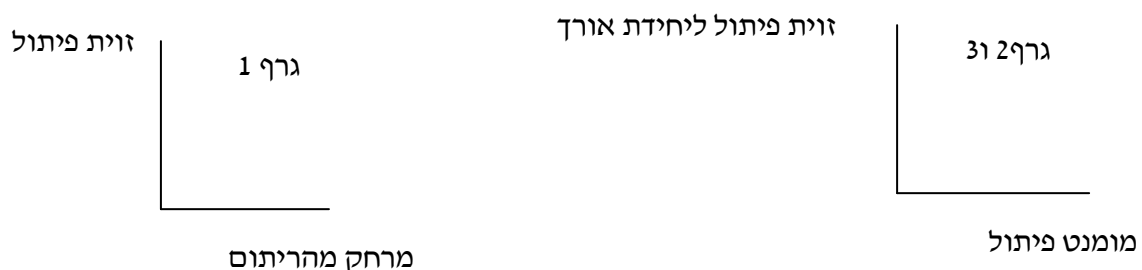
הערה:

- על מנת למנוע הבדל בין זווית הפיתול כתוצאה ממדי המעוות לזו של קרן הלייזר בגלל חופש בריתום, העמס בהתחלת הניסוי עומס התחלתי (נושא המשקולות) כך שנקוז חופש זה. אפס את מכשיר המדידה והתחל את הניסוי העמיסו את המוט במשקולות בנות חצי ק"ג מטווח שבין אפס עד שלושה ק"ג (מתקן ההעמסה מצוי מתחת לגלגלת ומתחת לשולחן). אחד מבני הזוג יעמיס משקולות וירשום את קריאות מד המעוותים (μs), השני יסמן וימדוד את השקיעות של נקודת הלייזר על הלוח.
- עבור קריאת המעוותים לכוון בכל פעם את מכשיר המדידה לערוץ התואם את מספר נקודת המדידה. יש לאפס כל ערוץ בתחילת הניסוי.
- את תוצאות מד המעוותים יש לחלק ב 2 כיוון שגורם הגשר הוא 2.
- את השקיעות שמודדים על הלוח יש לסכום מנקודה לנקודה (תמיד יחסית לנקודה ההתחלתית).
- יש למדוד שקיעות ומעוותים עבור נקודה 1 ו 2 .

8. עיבוד תוצאות:

הערה – הקפידו על עיקביות בשימוש ביחידות !!! (יש לעבוד ביחידה של ק"ג עבור הכוח)

- שרטטו בעזרת המחשב את הגרפים הבאים:





- הגרפים יצוירו בפיזור xy וקו מגמה יוסף אם יש בו צורך.
- גרף 1 יכיל עקומות של זווית הפיתול לפי עומסים שונים.
- גרפים 2 ו 3 יכילו כל אחד עקומה תיאורטית, עקומה ניסויית לפי מדידת מעוותים ועקומה ניסויים לפי מדידה בעזרת לייזר. גרף 2 יציג עקומות אלה עבור נקודה 1 וגרף 3 עבור נקודה 2.
- גרף 4 יכיל עקומה של חישוב תיאורטי ושתי עקומות ניסוייות על פי מעוותים אחת עבור כל נקודת מדידה.
- הדוח יכיל טבלה המרכזת את כל תוצאות הניסוי והחישובים ששימשו לבניית הגרפים. בנוסף יפורטו הגדלים הגיאומטריים בבעיה וינתנו דוגמאות חישוב מפורטות עבור כל אחד מהגדלים אותם חישבתם. (כל הדוגמאות יהיו עבור נקודה מסוימת ועבור עומס מסוים אותם תציינו).
- קשיחות מוגדרת כערך ההפוך של זווית הפיתול ליחידת אורך ליחידת מומנט פיתול $\left[\frac{\theta}{T}\right]^{-1}$. חשבו את הקשיחות מתוך השיפועים בגרפים 2 ו 3 לכל העקומות.
- חישובי שגיאה יחסית עבור הקשיחות.

9. סיכום ומסקנות:

- מהן התופעות אותן בדקת בניסוי:
- * הבט בפרמטרים השונים אותם בדקת.
- * הבט בגרפים ששרטטת.
- * הבט בחישובים השונים אותם ביצעת.
- מהן הסיבות האפשריות לשגיאות בניסוי פרט.
- 10. צורת הדו"ח:
- מטרות הניסוי.
- טבלאות של תוצאות וחישובים שונים.
- חישובים, דוגמאות חישוב, שגיאות יחסיות ודרישות ספציפיות לניסוי אם יש.
- גרפים.
- סיכום מסקנות