



אוניברסיטת בן-גוריון בנגב  
הפקולטה למדעי ההנדסה  
המחלקה להנדסת מכונות

## **חקירה ניסויית ונומרית של האינטראקציה של גל מאמץ עם שרשרת דיסקות פוטואלסטיות**

חיבור זה מהווה חלק מהדרישות  
לקבלת התואר "מגיסטר" בהנדסה

**מאת: אבנר גולדנברג**



אוניברסיטת בן-גוריון בנגב  
הפקולטה למדעי ההנדסה  
המחלקה להנדסת מכונות

## **חקירה ניסויית ונומרית של האינטראקציה של גל מאמץ עם שרשרת דיסקות פוטואלסטיות**

חיבור זה מהווה חלק מהדרישות  
לקבלת התואר "מגיסטר" בהנדסה

מאת: אבנר גולדנברג

מנחים: פרופ' גבי בן-דור  
פרופ' עוזר איגרא  
דר' אלכס בריטן

תאריך:

מחבר:

תאריך:

מנחה:

תאריך:

מנחה:

תאריך:

מנחה:

תאריך:

יו"ר ועדת מוסמכים:

## תקציר

הדינמיקה של גלי מאמץ המתקדמים בשרשרת ישרה יחידה של דיסקות נותחה בצורה ניסויית ונומרית. השינוי בצורת הגלים ומהירות התקדמותם, נבדקו בעת תנועתם בשרשרת של דיסקות תחת אות העמסה דינמי בעל צורת מדרגה. השפעת ההחזרה מהקצוות הקיצוניים של השרשרת, השפעה של עומס סטטי מוקדם, השפעת קוטר הדיסקות, צפיפותן, קשיחותן ואורך אות ההעמסה נבדקו בצורה נומרית. ההשפעה של עומס סטטי מוקדם נבדקה גם בצורה ניסויית. בעת החקירה הניסויית נעשה שימוש במערכת המכילה נקבת הלם לשם יצירת העומס. מערכת זו מאפשרת ליצור העמסה נורמלית והומוגנית על פני משטח הכניסה לתא הניסוי. אותות העמסה בעלי גודל ואורך משתנים כמו גם הפעלה של כוח סטטי מוקדם על תא הניסוי ניתנים להפעלה בצורה פשוטה ובמגוון רחב. מערכת אופטית המורכבת מלייזר, פולריסקופ ומצלמת CCD שימשה לצילום מצב המאמצים הדינמי בדיסקות שיוצרו מחומר פוטואלסטי. החקירה הנומרית נערכה באמצעות התוכנה המסחרית ABAQUS העושה שימוש בשיטת האלמנט הסופי. המודל הנומרי כלל דיסקות הניתנות לעיוות והגדרה של מגע בין דיסקות אלה תוך שימוש במנגנונים של קשיחות וריסון המגע. תוצאות המודל נבחנו מול תוצאות של כוח המגע ומדידת מעוותים מתוך ניסוי שנערך במקביל במעבדה על ידי Glam (2004). תוצאות הניסוי וההדמיה שימשו לניתוח והשוואה של צורת האותות, מהירותם, אורכם, פיזורם ודעיכת כוח המגע במקרים שונים. נמצא כי ההדמיה מתארת בצורה איכותית את מרבית התופעות שנחזו בניסוי. השוואה נוספת נערכה בין ניסוי והדמיה בהם בוצעה העמסה דינמית של שרשרת דיסקות המצויה תחת עומס סטטי מוקדם ( $p_{ps}$ ). בניגוד לתנודות בכוח המגע שניצפו בעת העמסה של שרשרת ללא עומס סטטי מוקדם, נוצר מאחורי חזית גל המאמץ מצב מאמצים אחיד הגדל בערכו עם הגידול בעומס הסטטי המוקדם. תופעה זו נובעת כנראה ממגע התחלתי טוב יותר בין הדיסקות. העליה בעומס הסטטי גוררת גם עליה במהירות הממוצעת של גל המאמצים המתקדם בשרשרת. בניסוי ראינו כי עליה זו במהירות נמשכת בתחום של  $0.1\text{bar} < p_{ps} < 0.6\text{bar}$  ומעבר לתחום זה תוספת בעומס הסטטי כמעט ואינה משנה את המהירות. תוצאות החקירה הנומרית הראו כי בטווח של  $310\text{kg/m}^3 < \rho < 4960\text{kg/m}^3$  גידול בצפיפות החומר ממנו עשויות הדיסקות מקטין את מהירות גל המאמץ. מעבר לערך זה גידול נוסף בצפיפות משפיע פחות על השינוי במהירות ובאורך הגל המתקדם. כמו כן, בעוד גידול בצפיפות גורם לפיזור ודעיכה חזקים של האות המתקדם, הרי עבור צפיפות מספיק נמוכה (ביחס לתכונות השרשרת),  $\rho=310\text{kg/m}^3$  במקרה זה, הכוח בכניסה מוגבר בתחילת ההתקדמות של האות ורק בהמשך הוא דועך. בין התוצאות שהתקבלו תוך השוואה לתוצאות מהספרות ניתן היה לראות כי

המודל הנומרי חוזה את קיומו של אות אופייני המתקדם למרחק רב בשרשרת ללא פיזור משמעותי. כאשר אות הכניסה ארוך מהאות האופייני נצפתה התפרקות של אות הכניסה לאותות קצרים יותר והגברה של הכוח בכניסה בחלק מהאותות החדשים. מהירות ההתקדמות הממוצעת תחת אות כניסה ארוך יותר היתה גבוהה יותר. בנוסף ראינו כי קוטר דיסקה גדול יותר ( $10\text{mm} < D < 40\text{mm}$ ) מצביע על מהירות ממוצעת גבוהה יותר ועל דעיכה ופיזור חזקים יותר בגל. מאידך עבור קוטר דיסקה קטן מספיק  $10\text{mm}$  קיבלנו בתחילת ההתקדמות הגברה של הכוח בכניסה.

חקירה מוצלחת זו של השפעת מאפיינים שונים על התקדמות האותות בתווך גרגרי, מדגימה גם את היכולת הבסיסית של המודל הנומרי לבחינת ההשפעה של מאפיינים כאלה או אחרים כפי שהם נדרשים ביישומים שונים. כך לדוגמא, בעת מיגון מבנים נדרשות מהתווך המגן תכונות של פיזור ודעיכה מהירים של הגל, ניתן לראות מהחקירה שבוצעה כי חלקיקים בעלי צפיפות גבוהה וקוטר גדול יתאימו לדרישות אלו.

## תודות

לאלכס בריטון, איליה חריטון, בני גלאם, ולדימיר שלימק וכל חברי המעבדה  
למכניקת המוצקים-יחידת החישובים, תודה רבה על הסבלנות, ההקשבה,  
החברות, ההנחיה, הדחיפה, העזרה ושיתוף הפעולה.  
לגבי בן-דור ולעוזר איגרא תודה על כל העזרה והתמיכה.  
לכל חברי המסדרון תודה על העידוד.  
לרוני תודה על הכל.

## תוכן העניינים

ג	תקציר	
ה	תודות	
ו	תוכן העניינים	
ח	רשימת סימנים	
ט	רשימת איורים	
יא	רשימת טבלאות	
1	מבוא	1
1	כללי	1.1
1	סקר ספרות	1.2
2	עבודה ניסויית	1.2.1
3	העמסה סטטית של תווך גרגרי	1.2.1.1
5	העמסה דינמית של תווך גרגרי	1.2.1.2
7	העמסה דינמית של תווך גרגרי דו-ממדי	1.2.1.2.1
11	העמסה דינמית של תווך גרגרי חד-ממדי	1.2.1.2.2
16	מודלים לתיאור התקדמות גלים בתווך אלסטי לינארי רציף ובתווך גרגרי	1.2.2
17	מודלים אנליטיים	1.2.2.1
17	התקדמות גלים בתווך אלסטי לינארי איזוטרופי רציף	1.2.2.1.1
18	התקדמות גלים בתווך גרגרי	1.2.2.1.2
20	עבודה נומרית	1.2.2.2
27	מטרות העבודה	1.3
28	רקע תיאורטי	2
28	מנגנון העברת העומס בין חלקיקים בתווך גרגרי - מנגנון המגע	2.1
30	פתרון עבור גופים גליליים אינסופיים	2.1.1
31	פתרון לבעיית מגע הכולל אינטראקציה משיקית	2.1.2
32	אור, מכשור אופטי והתיאוריה הפוטו-אלסטית	2.2
32	מונחים בסיסיים בתיאור האור	2.2.1
33	שבירה ועיכוב (refraction and retardation)	2.2.2
	חומרים בעלי אינדקס שבירה כפול ( birefringent or doubly refracting )	2.2.3
34	(materials)	
34	פלטת גל (wave plate)	2.2.3.1
36	אור מקוטב (polarized light)	2.2.4
36	התיאוריה הפוטואלסטית	2.2.5
37	הפולריסקופ	2.2.6
	פסים איזוכרומטיים (isochromatic fringes) ופסים איזוקליניים	2.2.7
38	(isoclinic fringes)	
41	פענוח התמונה הפוטואלסטית	2.2.8
42	קבלת שדה המאמצים	2.3
43	פתרון אנליטי לדיסקה תחת כוח מרוכז	2.4
46	מערכת הניסוי וההדמיה	3
46	מערכת הניסוי	3.1
46	ניקבת ההלם	3.1.1
47	תא הניסוי והמבנה הגרגרי	3.1.2

49.....	מערכת הצילום	3.1.3
49.....	הפולריסקופ	3.1.4
50.....	מקור האור	3.1.5
50.....	המצלמה והמחשב	3.1.6
51.....	מערכת הבקרה	3.1.7
51.....	פעולת מערכת הניסוי הפוטואלסטית	3.1.8
52.....	המודל הנומרי	3.2
56.....	תוצאות	4
56.....	הדמיה של שרשרת ישרה יחידה בת 11 דיסקות תחת עומס דינמי	4.1
56.....	אופן ההעמסה	4.1.1
56.....	תיאור מהלך הגלים	4.1.2
59.....	מאפיינים נוספים של התהליך	4.1.3
63.....	השוואה בין הדמיה לניסוי	4.2
63.....	השוואה כללית	4.2.1
68.....	סיבות אפשריות להבדלים בין ההדמיה לניסוי	4.2.2
69.....	סיכום השוואה בין הניסוי וההדמיה	4.2.3
	ניסוי והדמיה של העמסה דינמית על שרשרת ישרה יחידה בת 11 דיסקות	4.3
70.....	תחת עומס סטטי מוקדם	
70.....	מהלך הניסוי	4.3.1
71.....	תוצאות הניסוי	4.3.2
74.....	תוצאות ההדמיה והשוואה לניסוי	4.3.3
76.....	סיכום	4.3.4
	בדיקה נומרית של השפעת קוטר, צפיפות וקשיחות החלקיקים על התקדמות הגלים בשרשרת ישרה יחידה של דיסקות	4.4
77.....	השפעת קוטר הדיסקות על התקדמות הגלים בשרשרת ישרה יחידה של דיסקות	4.4.1
77.....	השפעת צפיפות הדיסקות על התקדמות הגלים בשרשרת ישרה יחידה של דיסקות	4.4.2
81.....	השפעת קשיחות הדיסקות על התקדמות הגלים בשרשרת ישרה יחידה של דיסקות	4.4.3
84.....	סיכום	4.4.4
86.....	הדמיה של העמסת שרשרת ישרה יחידה בת 80 דיסקות באותות בעלי משך שונה	4.5
87.....	תוצאות ההדמיה	4.5.1
88.....	סיכום	4.5.2
94.....	סיכום	5
96.....	רשימת מקורות	
100 .....	חישוב תכונות החומר	ניספח א'
102 .....	בדיקת התאמה בין המודל הנומרי לתוצאות אנליטיות	ניספח ב'
104 .....	פעולת הקוד הנומרי ABAQUS/Explicit בעת העמסה דנמית ובעת פתרון בעיות מגע	ניספח ג'
106 .....		

## רשימת סימנים

<u>ערך</u>	<u>סימן</u>
- חצי רוחב שטח המגע בין שתי דיסקות	$b$
- מהירות האור בואקום	$c$
- מהירות גל אורכי בתווך אלסטי רציף	$c_1$
- מהירות גל גזירה בתווך אלסטי רציף	$c_2$
- מהירות גל ריילי בתווך אלסטי רציף	$c_3$
- המקדם הפוטואלסטי היחסי	$c_{Tpe}$
- קוטר דיסקה	$D$
- מודול האלסטיות- מודול יאנג	$E$
- מקדם קשיחות המגע	$E^*$
- מודול האלסטיות בגזירה	$G$
- עובי דיסקה	$h$
- מספר הפס האיזוכרומטי	$N$
- כוח ליחידת אורך	$p$
- כוח המגע	$P$
- לחץ באזור המגע	$P$
- לחץ מרבי באזור המגע	$P_0$
- לחץ סטטי מוקדם	$p_{ps}$
- רדיוס העקמומיות היחסי של הגופים במגע	$R$
- רדיוסי הגופים 1 ו 2	$R_2, R_1$
- מקדם החיכוך באזור המגע	$\beta$
- ההתקרבות היחסית בין שני גופים במגע	$\delta_z$
- אורך גל	$\lambda$
- קבועי Lamé	$\mu, \lambda$
- יחס פואסון	$\nu$
- צפיפות החומר	$\rho$
- מאמצים ראשיים בנקודה	$\sigma_1, \sigma_2$
- מאמצים בכיוון x ובכיוון z	$\sigma_{xx}, \sigma_{zz}$
- מאמץ גזירה במישור xz	$\tau_{xz}$
- מאמץ גזירה ראשי	$\tau_{max}$



## רשימת איורים

- איור 1 (א) תווך גרגרי דו-ממדי בסידור אקראי. (ב) תווך גרגרי חד-ממדי שרשרת ישרה יחידה. 2.....
- איור 2 תמונה פוטואלסטית של מבנה גרגרי דו-ממדי. ניתן לראות בברור את רשת השרשראות הנושאות בעומס (Travers *et al.* (1988)). 3.....
- איור 3 כוח מופעל כנגד דפורמציה המבנה בסקלת log-log עבור מבנה גרגרי בגובה 40 שכבות ורוחב של 44 חלקיקים (Travers *et al.* (1988)). 4.....
- איור 4 (א) שרשרת יחידה ישרה (מבנה חד-ממדי) (ב) שרשרת יחידה בסידור זיג-זג (מבנה דו-ממדי). 5.....
- איור 5 השוואה בין פילוג הפסים הפוטואלסטיים תחת עומס דינמי מימין וסטטי משמאל. 6.....
- איור 6 (א) מבנה גרגרי בסידור BCC (ב) מבנה BCC תחת העמסה נקודתית על דיסקה אחת [Shukla & Zhu (1988)]. 7.....
- איור 7 (א) מבנה גרגרי בסידור HCP (ב) מבנה HCP תחת העמסה נקודתית על דיסקה אחת [Shukla & Zhu (1988)]. 8.....
- איור 8 הזווית המוגדרת בין החלקיקים מציינת את כמות העומס המועבר לחלקיק. 9.....
- איור 9 מבנה HCP תחת העמסה נקודתית על דיסקה אחת כאשר ב: (א) כל הדיסקות זהות (ב) דיסקה אחת בעלת אימפדנס אקוסטי גבוה יותר משאר הדיסקות (ג) דיסקה אחת חסרה. [Shukla *et al.* (1992)]. 10.....
- איור 10 לחץ מרבי בתחתית תווך גרגרי כפונקציה של גובה התווך [Britan *et al.* (1997)]. 10.....
- איור 11 פרופיל כוח המגע כתלות בזמן במגעים שונים. מתוך ניסוי פוטואלסטי על שרשרת יחידה ישרה בת 20 דיסקות בקוטר 25.4mm [Shukla & Damania (1987)]. 11.....
- איור 12 פסים איזוכרומטים המתקבלים בניסוי פוטואלסטי על שרשרת ישרה יחידה בזמנים שונים [Shukla & Damania (1987)]. 12.....
- איור 13 דעיכת כוח המגע המנורמל בשרשרת ישרה יחידה של כדורים ודיסקות תחת אות כניסה באורכים שונים [Zhu *et al.* (1997)]. 12.....
- איור 14 מהירות ממוצעת כתלות בקוטר הדיסקה [Xu & Shukla (1990)]. 13.....
- איור 15 מהירות ממוצעת כתלות ביחס בין אורך הגל לקוטר הדיסקה [Xu & Shukla (1990)]. 13.....
- איור 16 הגדרת דיסקות אליפטיות בעלות רוחב משתנה. 14.....
- איור 17 מעוות מגע מנורמל מתוך מדידי עיבור בשרשרת ישרה יחידה עבור אות כניסה באורך (א)  $90 \mu\text{s}$  (ב)  $650 \mu\text{s}$  [Shukla *et al.* (1993)]. 15.....
- איור 18 שינוי כוח המגע המרבי המנורמל עם ההתקדמות במורד השרשרת עבור אותות כניסה באורכים שונים [Shukla *et al.* (1993b)]. 16.....
- איור 19 קשרי מגע שונים [Sadd *et al.* (1993)]. 21.....
- איור 20 כוח מגע מנורמל בשרשרת בת 40 דיסקות. מתוך הדמיה ללא מנגנון ריסון כאשר קשר המגע הוא (א) ליניארי (ב) לא-ליניארי. 22.....
- איור 21 כוח מגע מנורמל בשרשרת בת 40 דיסקות. מתוך הדמיה עם קשר מגע לא-ליניארי הכולל היסטריזיס. 22.....
- איור 22 השוואת פרופיל האות בהעמסה ארוכה ( $650 \mu\text{s}$ ) עבור תוצאה (א) ניסויית (ב) נומרית [Shukla *et al.* (1993)]. 23.....
- איור 23 מודל נומרי (FEM עם אלמנטי קורה) של תווך גרגרי דו-ממדי בסידור אקראי עם דיסקות בקטרים שונים. בעת הפתרון מציינים הענפים העבים שרשראות בהן מועבר עומס רב יותר [Radeke *et al.* (2002)]. 25.....
- איור 24 חתך של שני גופים (א) בנגיעה ללא הפעלת כוח (ב) אחרי הפעלת כוח. 29.....
- איור 25 וקטורים בשדה חשמלי ושדה מגטי המגדירים את הגל האלקרומגנטי. 32.....
- איור 26 (א) התפצלות האור בפלטת גל (ב) התפצלות האור במקטב מישורי. 34.....
- איור 27 פולריסקופ מעגלי. 37.....

- איור 28 התפצלות האור בדגם בעל תכונות של אינדקס שבירה כפול.....38  
 איור 29 צילום של דיסקה פוטואלסטית תחת העמסה צירית בעזרת מקור אור מונוכרומטי (א)  
 שדה שחור (ב) שדה לבן.....39  
 איור 30 דיסקה פוטואלסטית תחת העמסה צירית. שילוב של תמונה משדה שחור בחלק  
 העליון ומשדה לבן בחלק התחתון נותנת את שדה המאמצים בצורה מלאה] Durelli &  
 [Riley (1965).....41  
 איור 31 היווצרות הפסים האיזוכרומטיים בדיסקה תחת העמסה צירית. התמונות מסודרות  
 משמאל לימין מלמעלה למטה [Durelli & Riley (1965).....42  
 איור 32 דיסקה תחת העמסה מקבילה של שני כוחות מרוכזים.....43  
 איור 33 דיסקה תחת העמסה צירית- דוגמא לקיום שלאורכם מאמץ הגזירה המרבי קבוע. 44  
 איור 34 השוואה בין פתרון אנליטי לדיסקה בהעמסה צירית של כוח מרוכז לבין תמונת  
 דיסקה תחת העמסה צירית בשיטה הפוטואלסטית. הפתרון האנליטי מגיע עם ציון  
 הפסים האיזוכרומטיים המתאימים. (א) פתרון אנליטי לשדה שחור (ב) תמונה  
 פוטואלסטית בשדה שחור (ג) פתרון אנליטי לשדה לבן (ד) תמונה פוטואלסטית בשדה  
 לבן.....45  
 איור 35 תיאור סכמטי של ניקבת ההלם ותא הניסוי.....46  
 איור 36 (א) תא הניסוי (ב) תא הניסוי מורכב לניקבת ההלם.....48  
 איור 37 החומר הפוטואלסטי PSM-9 במצב גולמי משמאל ואחרי עיבוד מימין.....49  
 איור 38 הפולריסקופ ותא הניסוי.....50  
 איור 39 מצלמת ה CCD עם העדשה.....51  
 איור 40 תרשים סכמטי של מערכת הניסוי.....52  
 איור 41 המודל הגיאומטרי, תנאי השפה ורשת החישוב.....54  
 איור 42 אותות כוח המגע בשלוש נקודות לאורך שרשרת.....57  
 איור 43 התקדמות חזית הגל כתלות בזמן.....59  
 איור 44 השוואה של השינוי בכוח המגע המרבי אחרי ה-TSW.....61  
 איור 45 תמונות נבחרות מתוך ניסוי והדמיה (א) TSW (ב) RSW (ג) TEW (ד) REW.....63  
 איור 46 השוואת כוח המגע בין ניסוי פוטואלסטי והדמיה במגע 4-5.....64  
 איור 47 השוואת ערך המעוות בין ניסוי והדמיה במרחק 1.5mm מתחת למגע 4-5.....64  
 איור 48 אותות כוח המגע בשלושה מגעים עוקבים.....66  
 איור 49 ניסוי- תמונת השרשראות אחרי העמסה סטטית של (a) שרשרת חופשית (b)  
 0.1bar (c) 0.6bar (d) 1bar.....70  
 איור 50 תמונת השרשראות אחרי העמסה דינמית (א) ניסוי-0.231ms (ב) הדמיה-0.278ms  
 71.....  
 איור 51 ניסוי - כוח מגע מרבי במגעים השונים לאורך השרשרת אחרי 0.231ms מרגע  
 הפעלת הלחץ (הקווים אינם מציינים כוח אלה מחברים בין הנקודות).....72  
 איור 52 הדמיה- תמונת אחד המגעים אחרי העמסה סטטית מוקדמת (a) שרשרת חופשית  
 0.1bar (b) 0.6bar (c) 1bar (d).....73  
 איור 53 הדמיה - כוח מגע מרבי במגעים השונים לאורך השרשרת אחרי 0.278ms מרגע  
 הפעלת הלחץ (הקווים אינם מציינים כוח אלה מחברים בין הנקודות).....74  
 איור 54 כוח מגע במרחק של 92mm מנקודת ההעמסה עבור שרשראות של דיסקות בעלות  
 קוטר שונה.....77  
 איור 55 השוואת מאפיינים שונים של האות המתקדם בשרשראות של דיסקות בעלות קטרים  
 שונים.....78  
 איור 56 כוח מגע מירבי מנורמל לאורך שרשראות של דיסקות בעלות קטרים שונים.....79  
 איור 57 כוח המגע המנורמל במגע 4-5 עבור שרשראות של דיסקות בעלות צפיפות שונה.....80  
 איור 58 השוואת מאפיינים שונים של האות המתקדם בשרשראות של דיסקות בעלות צפיפות  
 שונה.....81  
 איור 59 כוח מגע מירבי מנורמל לאורך שרשראות של דיסקות בעלות צפיפות שונה.....82  
 איור 60 אות הכוח במגע 4-5 עבור שרשראות של דיסקות בעלות קשיחות חומר שונה.....83

- איור 61 המעוות כ-1.5mm מתחת למגע 4-5 עבור שרשראות של דיסקות בעלות קשיחות חומר שונה. 84.....
- איור 62 כוח המגע המירבי המנורמל, לאורך שרשראות של דיסקות בעלות קשיחות חומר שונה. 84.....
- איור 63 כוח המגע המנורמל לאורך שרשראות של 80 דיסקות תחת אות כניסה בעל אורך שונה. 88.....
- איור 64 כוח המגע המרבי המנורמל לאורך שרשראות תחת אות כניסה בעל אורך שונה... 89
- איור 65 המהירות הממוצעת של האות הראשון המתקדם בשרשראות תחת אות כניסה בעל אורך שונה. 90.....
- איור 66 הכוח המנורמל לפי ערכו המרבי, בשתי דיסקות לאורך שרשרת תחת אות כניסה בעל אורך של (א) 0.07ms (ב) 0.11ms (ג) 0.28ms (ד) 0.56ms. 92.....
- איור 67 אותות כוח מנורמלים במגעים לאורך שרשרת (א) עם מגע רך וללא ריסון (ב) עם מגע קשיח וריסון. 93.....

## רשימת טבלאות

- טבלה 1 נתונים טכניים של מתמרי הלחץ. 47.....
- טבלה 2 תכונות חומר הפוטואלסטי PSM-9. 49.....
- טבלה 3 משכי התנודות ב- $\mu\text{sec}$  אחרי פירוק האות הראשי בנקודות שונות לאורך השרשרת. 61.....
- טבלה 4 המהירות הממוצעת של הגלים בשלבים שונים של התנועה. 66.....
- טבלה 5 נתוני ניסוי עבור העמסה דינמית של שרשרת ישרה יחידה בת 10 דיסקות תחת לחץ סטטי מוקדם (מספר מאך בנקבה  $M=1.367$ ). 70.....
- טבלה 6 השוואת מהירויות ממוצעות של אות המתקדם בשרשרת תחת עומס סטטי מוקדם. 73.....

## 1 מבוא

*"A granular material behaves differently from any other familiar forms of matter- solids, liquids, or gases- and should therefore be considered an additional state of matter in its own right."*

Nagel & Jager (1996)

### 1.1 כללי

העבודה הנוכחית עוסקת בלימוד ניסויי ונומרי של התקדמות אותות מכניים בתווך גרגרי. העניין המדעי והטכנולוגי באופן התקדמותם של אותות מכנים בתווך גרגרי התעורר אי שם באמצע המאה ה-20. מבחינת המכניקה הקלאסית מדובר בבעיה סבוכה הכרוכה בניחות דינמי של מערכת מרובת גופים (multi body system), בעלי יכולת להתעוות הקשורים ביניהם באמצעות מכניזם מגע (contact mechanism). מכיוון הגיאומכניקה (soil and rock mechanics) ישנה התעניינות רבה לגבי תנועת אותות מכניים בקרקע לאחר אירוע גיאולוגי כלשהו כדוגמת רעידת אדמה. בהבט הטכנולוגי ישנו עניין מהתחום של דחיסת אבקות בתעשיית התרופות וכן בעת יצירת חומרים מורכבים. לאחרונה התעורר גם עניין רב מכיוון תחום המיגון וזאת עקב התכונות המכניות המיוחדות של התווך הגרגרי בספיגה ובידוד מפני גלי הים והדף. מכאן ששכיחותם של המבנים אותם ניתן להגדיר ולנתח כתווך גרגרי וכן תכונותיהם המיוחדות מציבים אתגר ועניין רב בפני החוקרים בתחומים השונים.

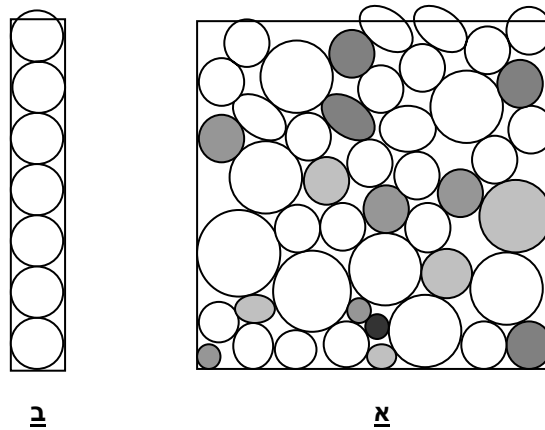
מבחינה ניסויית נבחר מודל בעל מבנה חד-ממדי (שרשרת אנכית של חלקיקים) המורכב מחלקיקים גליליים דו-ממדים (דיסקות). זהו המודל הבסיסי ביותר לחקירת תווך גרגרי ואיתו נוח מאד להתחיל בלימוד הנושא. מודל זה מקטין את כמות הפרמטרים אותה יש לבחון אך בו זמנית יכול לספק תשובות לשאלות רבות הנוגעות לתכונות התווך הגרגרי. הדיסקות שנבחרו עשויות מחומר אפוקסי פוטואלסטי (PSM-9) כך שניתן לצפות ולתעד את השינויים בשדה המאמצים וכך את מעבר העומס בתוך המודל הנבחן תוך שימוש בפולריסקופ ומערכת צילום מתאימה.

מבחינה נומרית נעשה ניסיון למדל את התופעה הנבחנת תוך שימוש בקוד המסחרי ABAQUS המתבסס על שיטת האלמנט הסופי (FEM). השימוש בתוכנת הסימולציה מאפשר חיזוי חלקי של תוצאות הניסוי וכן הוא מעלה שאלות ונקודות מענינות להמשך המחקר. בכך תורמת ההדמיה הנומרית להבנת הבעיה הפיזיקלית.

### 1.2 סקר ספרות

תווך גרגרי הוא כאמור מונח המתאר מבנה רב-גופי, כאשר הגופים בעלי היכולת

להתעוות שונים זה מזה בצורתם, בגודלם ובכיווניהם והם מונחים בסידור כלשהו אחד על גבי השני [איור 1 (א)]. הגופים מתקשרים ביניהם באמצעות מכניזם מגע אך אין חובה שכל גוף יתקשר עם כל שכניו כלומר, תתכן התפלגות לא אחידה של המגעים במרחב. יתכנו גם מבנים, בהם בין החלקיקים קיים חומר נוסף כעין מילוי (filler) כמו במקרה של חול בסביבה מימית אך עבודה זו לא עוסקת במקרים אלה. הדוגמא הטובה ביותר לתווך גרגרי יבש היא כמובן החול אשר על שפת הים אולם גם סוגים אחרים של קרקע, סלעים, מינרלים במצבי עיבוד שונים וחומרים רבים אחרים מהווים מבנים שיש לנתחם כתווך גרגרי.



איור 1 (א) תווך גרגרי דו-ממדי בסידור אקראי. (ב) תווך גרגרי חד-ממדי שרשרת ישרה יחידה.

מבין כיווני המחקר השונים המתארים את תכונותיו של התווך הגרגרי היבש עוסקת עבודה זו בניסיון להבין את ההתקדמות הדינמית של גלים מכניים בתווך זה. זוהי עבודה בסיסית וראשונית בטיבעה ולכן היא מתמקדת במידול התווך הגרגרי כמבנה חד-ממדי פשוט של שרשרת יחידה ישרה של חלקיקים [איור 1 (ב)]. מבנה זה מונע את העיסוק בהתקדמות דו-ממדית של גלים בין הדיסקות. בכדי לפשט עוד את המודל הנחקר ערעור התווך המתואר בעבודה מתייחס רק לערעור החלקיקים ואינו כולל פילטרציה של אויר כלומר מדובר על התקדמות גלים בתווך המוצק בלבד.

בין המאפיינים המשמשים לתאור התקדמות הגלים ניתן למצוא את מהירות הגל המתקדם, אורך הגל (wave length), משך הגל (wave duration), דעיכת הגל ופיזורו.

### 1.2.1 עבודה ניסויית

סקירה זו מתייחסת רק לחלק מן העבודות הרבות המופיעות בספרות ובעיקר לכאלה שהשתמשו בשיטה הפוטואלסטית (ראה סעיף 2.2) ככלי ניסוי עיקרי, לכן יתכן כי חלק מן התוצאות המוזכרות הופיעו במאמרים הקודמים לאלו המצוינים כאן. ראוי לציין כי הסקירה המוצגת מעט יותר רחבה מהתחום הממוקד בו עוסקת העבודה וזאת בכדי להכיר קצת יותר

את המונחים השונים והתופעות השונות הקשורים בתווך הגרגרי. סקירת העבודות הניסוייות המופיעות בספרות מצריכה חלוקה לקטגוריות שונות. בתחילה תוזכרנה בקצרה עבודות בהן העמסת התווך הגרגרי היתה סטטית ולאחר מכן עבודות בהן ההעמסה היא דינמית. מבחינת צורת המבנים המועמסים יובדלו מבנים חד-ממדים מדו-ממדים.

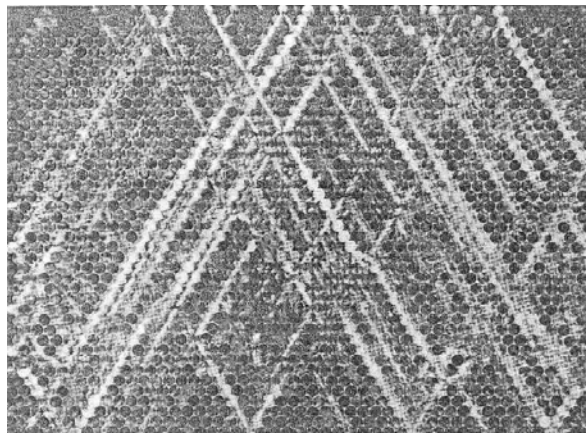
ראשית חשוב להתייחס למספר עבודות בעלות חשיבות היסטורית ותפיסתית. Iida (1939) ערך את אחד הניסויים הראשונים בהעמסה דינמית של תווך גרגרי, על ידי הרעדה של מבנים גרגריים תלת-ממדיים העשויים מחומרים שונים. בעבודתו קיימים מספר רעיונות בסיסיים כגון מידול תווך גרגרי כמבנה של חלקיקים אלסטיים וניסיון למידול אנליטי תוך התייחסות למאמצי המגע בין החלקיקים רק בכיוון הנורמלי למשטח המגע.

שיטת ניסוי חדשה לחקירת תווך גרגרי מדווחת בעבודתם של Drescher & de Josselin (1972) שהציגו את התווך כמבנה דו-ממדי של דיסקות העשויות מחומר פוטואלסטי וצפו בו בעזרת פולריסקופ. למרות שהיתה זו חקירה סטטית היא מהווה פריצת דרך חשובה בתחום כולו.

### 1.2.1.1 העמסה סטטית של תווך גרגרי

נסקור כעת בקצרה בעבודות שבהן נבדק תווך גרגרי תחת העמסה סטטית. היריעה קצרה מלתאר את כל העבודה שנעשתה בתחום זה אולם נבחר לתאר במספר מילים שני תחומים עיקריים, האחד הוא היווצרות דרכים להעברת עומס במבנים דו-ממדים והשני הוא השפעת חיכוך מקירות אנכיים על הכוח המועבר לתחתית המבנה.

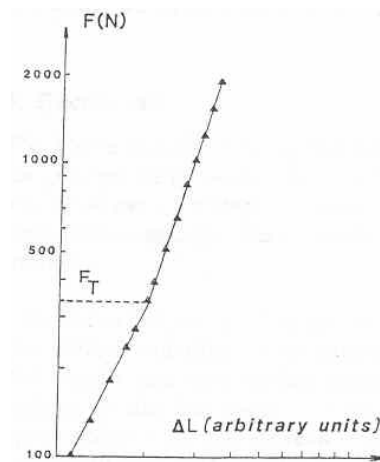
Travers *et al.* (1988) חקרו מבנים דו-ממדים ודיווחו כי אחרי הפעלת העומס נוצרות במבנה קבוצות של מגעים יציבים יותר היוצרים שרשראות קשיחות של חלקיקים. שרשראות אלה מעבירות כוחות גדולים עקב קשיחותן הגבוהה יחסית בהשוואה לקבוצות חלקיקים אחרות.



איור 2 תמונה פוטואלסטית של מבנה גרגרי דו-ממדי. ניתן לראות בברור את רשת השרשראות הנושאות בעומס (Travers *et al.* (1988)).

נמצא כי פילוג השרשראות במבנה הוא אקראי לחלוטין, כמו כן ככל שהמבנה יהיה בעל שכבות רבות יותר השרשראות יצרו בינהן מעין רשת של דרכים המפולגת בצורה כמעט הומוגנית (איור 2). תופעה זו בה רק חלק מהחלקיקים נושאים בעומס נבחנה על ידי הוצאת דיסקות מנקודות שונות במבנה. נמצא שהוצאת דיסקות בהן לא אובחנו מאמצים אינה משפיעה על התפלגות המאמצים הכללית במבנה בעוד שהוצאת דיסקות בהן אובחנו מאמצים משנה לחלוטין את התפלגות המאמצים הכללית.

הכותבים מבחינים בין שלושה מצבי העמסה. כאשר עוצמת הכוח נמוכה הדפורמציה במבנה נובעת מתזוזות וסיבובים של החלקיקים וזהו למעשה שלב של סידור מחדש של המבנה. כאשר עוצמת הכוח בינונית הדפורמציה במבנה היא של החלקיקים עצמם וניתנת לתיאור לפי תיאורית Hertz<sup>1</sup> אך לא כל המגעים פעילים בהעברת העומס. עבור עוצמת כוח גבוהה כמעט כל המגעים פעילים והדפורמציה מתנהגת לפי תיאורית Hertz. טווח הכוחות תלוי בגיאומטריית האריזה, המאפיינים המכניים של החלקיקים והחיכוך שביניהם. באיור 3 ניתן לראות גרף של כוח כנגד דפורמציה המבנה. שני שיפועים שונים (כלומר שני חוקי חזקה שונים) מתארים את הדפורמציה במבנה בהתאם לשלב הכוח הנמוך ושלב הכוח הבינוני/גבוה. נקודת המעבר בין שיפועים אלה תלויה גם בגובה במבנה.



איור 3 כוח מופעל כנגד דפורמציה המבנה בסקלת log-log עבור מבנה גרגרי בגובה 40 שכבות ורוחב של 44 חלקיקים (Travers et al. (1988)).

בנוגע להשפעת החיכוך שבין הקירות האנכיים ובין החומר הגרגרי מזכירים הכותבים את עבודתו של Dantu (1967) אשר הראה כי עבור מיכלים בהם יחס הממדים (רוחב/גובה) גדול, החלק התחתון אינו מרגיש את המאמצים המופעלים בחלק העליון עקב החיכוך בקירות

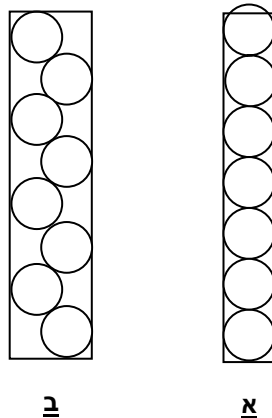
<sup>1</sup> תיאורית המגע של Hertz הינה ניתוח אנליטי של מגע בין שני גופים תחת העמסה סטטית. זוהי התיאוריה הנפוצה ביותר לפתרון בעיות מגע. להרחבה ראה סעיף 2.1.

היוצר תופעה של גישור (bridging effect). במקרה זה מציע Dantu כי הכוח בשכבה כלשהי משתנה כפונקציה של הגובה  $z$  (בשכבה העליונה של המבנה) בצורה  $F(z)=F(0) e^{-\alpha z}$ . במקרה זה מניחים שמקדם החיכוך על הקירות קבוע. הכותבים בודקים בעבודתם מבנה שבו יחס הממדים תמיד קטן מ-1. הם רואים בניגוד לתוצאה הקודמת, כי למרות שישנה ירידה קטנה בכוח המורגש בתחתית המבנה עם העלייה בגובהו (הוספת שכבות), עדיין ניתן לומר כי החיכוך על הקירות זניח. תוצאה זו תואמת גם לתוצאה זהה שהושגה על ידי Ito & Kuno (1978) ומלמדת כי החיכוך פחות חשוב בחלקו העליון של המבנה הגרגרי. הכותבים מציינים גם כי לדעתם מקדם החיכוך משתנה עם גובה המבנה.

ניתן לראות כי העבודה הניסויית הסטטית בוחנת תופעות בצורה איכותית בתוך המבנה ואילו בדיקה כמותית מתבצעת בעיקר על גבולות התווך הגרגרי. חשוב לציין שעבודה זו גם אינה מספקת די נתונים בכדי לבנות מודלים יעילים לתיאור אופן מעבר העומס לחומר הגרגרי. מכאן מבינים החוקרים שבכדי להבין באמת את התפתחות העומס בתוך התווך הגרגרי יש לבצע ניסויים תחת העמסה דינמית.

#### 1.2.1.2 העמסה דינמית של תווך גרגרי

בתחילת שנות ה-80 פירסמו Shukla & Rossmannith (1981) מאמר ראשון בו נעשה שימוש בשיטה הפוטואלסטית ביחד עם צילום מהיר לחקירת התקדמות גלים בתווך גרגרי תחת העמסה דינמית. מאמר מוקדם ובסיסי זה מדגים את היתרון בשיטה זו הקרויה פוטואלסטיות דינמית (dynamic photoelasticity) לחקירת התקדמות גלים, בכך שניתן לקבל תמונה מלאה של שדה המאמצים במבנה הנחקר בכל רגע. עבודה זו מכילה גם מספר מאפיינים שילוו את עבודותיו של Shukla אליהן נתייחס בהמשך. דגמי הדיסקות עשויים מפוליאיסטר מסחרי בשם Homalite 100. העמסת הדגמים היא נקודתית כלומר, מטען חומר נפץ קטן מתפוצץ מעל אימפקטור קטן (punch) המכה בדיסקה אחת בלבד (האימפקטור צמוד לדיסקה לפני הפיצוץ). העמסה זו מייצרת אות כניסה קצר בצורת משולש הדועך בצורה

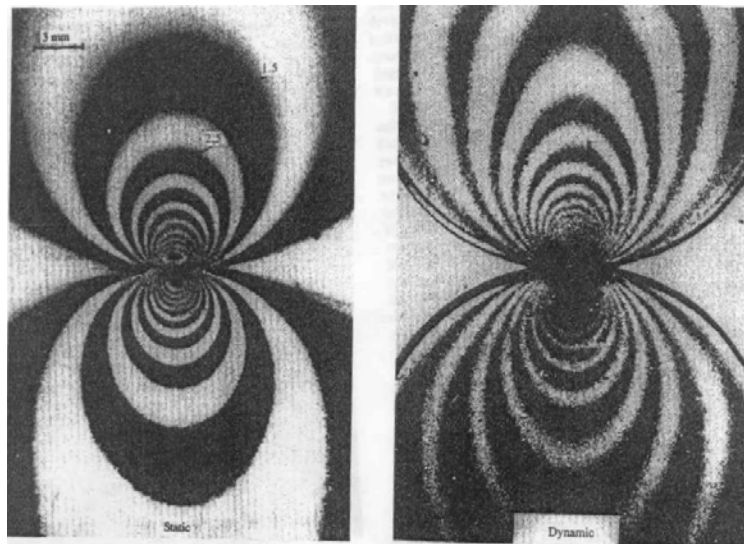


איור 4 (א) שרשרת יחידה ישרה (מבנה חד-ממדי) (ב) שרשרת יחידה בסיסור זיג-זג (מבנה דו-ממדי).



אקספוננציאלית (גל הדף) אך גודלו ומישכו לא נמדדו בניסוי. הדגמים הניסויים הם של שרשרת יחידה ישרה [מבנה חד-ממדי-איור 4 (א)], שרשרת בסידור זיג-זג [איור 4 (ב)] ושל אוסף דיסקות המסודר בצורה אקראית [מבנה דו-ממדי כמוצג באיור 1 (א)]. הדיסקות במבנה הדו-ממדי בעלות קוטר ופני שטח לא אחידים.

Shukla & Nigam (1985) מציעים שיטה נומרית המשלבת את טכניקת הריבועים הפחותים (least squares) ושיטת ניוטון-ראפסון (Newton-Raphson) לקבלת שדה המאמצים מסביב לנקודת המגע באמצעות מציאת רוחב שטח המגע ומקדם החיכוך בין החלקיקים. אינטגרציה של המאמצים נותנת את הכוח בנקודת המגע. הנתונים מתקבלים מכל השדה הפוטואלסטי (ראה סעיף 2.3). שיטה זו משתמשת בתיאורית מאמצי מגע מתקדמת יותר הכוללת מאמצים נורמליים ומשיקיים למשטח המגע, כלומר עם ובלי חיכוך. חשוב לציין ששיטה זו מסתמכת על פיתוח ביטויים לשדה המאמצים תחת העמסה סטטית ולכן הפעלתה בעת ניסוי דינמי מצריכה מצב שבו ניתן להגיד כי שדה המאמצים מצוי במצב העמסה קואזי-סטטי. Shukla & Damania (1987) משתמשים בפוטואלסטיות דינמית ומראים שעבור שרשרת אנכית ישרה (20 דיסקות) אורך הגל המתקדם גדול מקוטר הדיסקה (איור 11) וכן כי צורת פילוג הפסים הפוטואלסטיים (isochromatic fringes) סימטרית ביחס לנקודת המגע ודומה לפילוג המתקבל תחת העמסה סטטית (איור 5). מכאן ניתן להגיד כי קיים מצב העמסה קואזי-סטטי.



איור 5 השוואה בין פילוג הפסים הפוטואלסטיים תחת עומס דינמי מימין וסטטי משמאל [Shukla et al. (1988)].

חשוב להזכיר כי Shukla et al. (1993a) מציינים מספר מגבלות בעת שימוש בדיסקות עגולות וחלקות למידול תווך גרגרי. בין השאר הם מציינים כי תווך גרגרי אינו תמיד עגול,

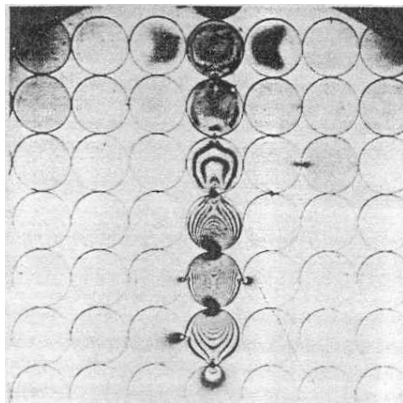
יתכן שלחלקיק בתווך אמיתי יהיו יותר או פחות נקודות מגע מאשר לחלקיק במודל, השפה בחלקיק אמיתי יכולה להיות חלקה או מחוספסת וכמו כן כאשר ממדלים חלקיק לא עגול הנורמל לנקודת המגע אינו עובר בהכרח דרך מרכז הדיסקה.

### 1.2.1.2.1 העמסה דינמית של תווך גרגרי דו-ממדי

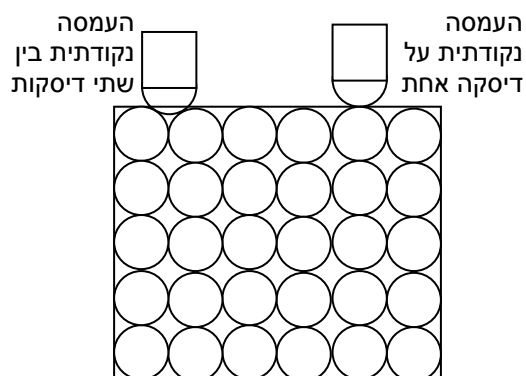
רצוי שנתחיל ונאמר כי אחת התופעות המעניינות המאובחנות בהעמסה של מבנים דו-ממדים היא היווצרות של דרכי העברת עומס. כפי שניתן לראות בהעמסה סטטית מדובר בהיווצרות שרשראות של דיסקות שלאורכן מועבר העומס בעוד שדיסקות שאינן חלק משרשראות אלה עשויות שלא לחוש בעומס כלל. מכאן מסיקים החוקרים כי אחוז הפורוזיות במבנה גרגרי הוא פרמטר שאינו מספיק בכדי ללמד אותנו על התפלגות המאמצים וצורת מעבר העומס במבנה. מסקנה זו מביאה את החוקרים להתמקד בחקירת המיקרו-מבנה של התווך הגרגרי המשפיע על צורת מעבר העומס, כאשר ידוע כי מעבר העומס מתבצע בעיקר באמצעות מנגנון המגע.

המבנים הדו-ממדים מחולקים בספרות לפי מבנים מסודרים (לדוגמה Body Centered Cubic-BCC, Hexagonal Closed Packing-HCP) ומבנים אקראיים המדמים תווך גרגרי אמיתי בצורה נכונה יותר. לימוד תופעות מכוונות מתרחש בעיקר על מבנים מסודרים וניסויים על מבנים אקראיים משמשים בעיקר להשוואה עם מודלים שונים במטרה לבדוק את יכולת החיזוי של המודל.

Iida (1939) שחקר מבנה תלת-ממדי הראה כי מהירות הגלים בתווך גרגרי נמוכה ממהירותם בתווך הומוגני רציף (פלטתה). כמו כן, ככל שנגדיל את צפיפות התווך תגדל גם מהירות הגלים. בנוסף הראה Iida תלות של מהירות הגלים הליניאריים בכוח הסטטי  $F$  הפועל על המבנה בצורה של  $F^{1/6}$ . תוצאה זו תואמת גם לתיאוריה של Hertz. ראוי לציין כי



ב



א

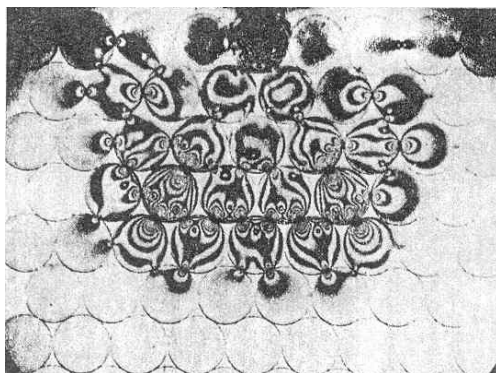
איור 6 (א) מבנה גרגרי בסידור BCC (ב) מבנה BCC תחת העמסה נקודתית על דיסקה אחת [Shukla & Zhu (1988)].

למרות שתוצאותיו אינן מוחלטות בעניין זה Iida ציין שעם הגידול בקוטר החלקיקים גדלה מהירות הגלים בתווך.

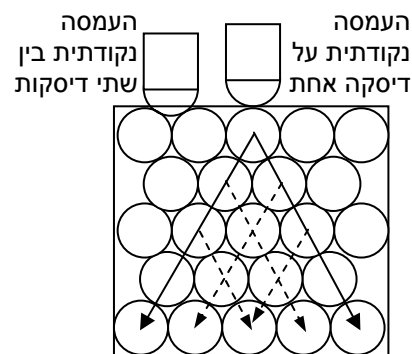
עבור מבנה בסידור BCC הראו Shukla & Damania (1987) כי תחת העמסה נקודתית על דיסקה אחת [איור 6 (ב)] העומס מועבר כאילו היתה זו שרשרת יחידה ישרה וכמעט אין איבוד אנרגיה לצדדים. תוצאה זו מלמדת כי רוב העומס מועבר בניצב למשטח המגע בין הדיסקות. העמסת מבנה זה בין שתי דיסקות יוצרת מצב סימטרי כאשר הגלים נעים בשרשרת אנכית ואופקית במהירות זהה. Shukla & Zhu (1988) בדקו האם ישנה השפעה למאמץ מוקדם (pre-stress) על פילוג המאמצים במבנה BCC. הם מצאו כי צורת הפילוג לא מושפעת אך המהירות גדלה באופן משמעותי.

מבנה בסידור HCP הוא מבנה מעניין יותר כיוון שתחת העמסה על דיסקה אחת ניתן לחזות בהיווצרות שרשראות של דיסקות המעבירות את העומס (דרכי העברת עומס) ולהסיק שהתקדמות הגלים היא דו-ממדית.

Shukla & Damania (1987) מבחינים כי בסידור זה ישנן שרשראות ראשיות שמתחילות בנקודת העמסה ומהן מתפצלות שרשראות משניות. במקרה של העמסה על דיסקה אחת יוצרות השרשראות הראשיות מבנה קוני שלאורכו מועבר מרבית העומס כמראה על ידי החצים המלאים באיור 7 (א). השרשראות המשניות המצוינות בחצים המקווקוים מעבירות חלק קטן יותר של העומס כפי שניתן לראות מהשוואה לאיור 7 (ב).



ב

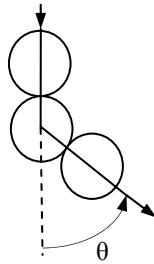


א

איור 7 (א) מבנה גרגרי בסידור HCP (ב) מבנה HCP תחת העמסה נקודתית על דיסקה אחת [Shukla & Zhu (1988)].

החיכוך בין הדיסקות לאורך השרשראות הראשיות קטן מאד וניתן להזנחה בעוד שבמעבר לשרשראות המשניות הוא דומיננטי. דעיכת אמפליטודת הגל במבנה זה גבוהה הרבה יותר מאשר בשרשרת יחידה ישרה לעיתים יותר מפי 3 (70% בחמש הדיסקות הראשונות לאורך אחת השרשראות הראשיות).

הכותבים מגדירים זווית (איור 8) הנוצרת בין הישר הדמיוני המציין את המשך הנורמל בנקודת המגע שבה נכנס העומס לדיסקה לבין הנורמל בנקודת המגע שבה יוצא העומס מהדיסקה (הזווית שווה ל  $0^\circ$  בכל הדיסקות בשרשרת יחידה ישרה)<sup>2</sup>. הם מציינים כי כמות העומס (כוח, מאמץ) המועבר במגע והיווצרות דרכי העברת העומס תלויות בין השאר בזווית זו. העברת העומס לא תתבצע כאשר זווית זו גדולה מ  $90^\circ$  ותגדל ככל שהזווית תתקרב לאפס. Shukla *et al.* (1988) בדקו גם הם את השפעת הזווית במצב שבו ישנה בדיסקה יותר מנקודת יציאה אחת (יותר נקודות מגע עם דיסקות שכנות) עבור העומס הנכנס. הם מצאו (בהתייחס להגדרת הזווית שהובאה לעיל) כי לא רק שככל שהזווית קרובה ל  $90^\circ$  עובר פחות

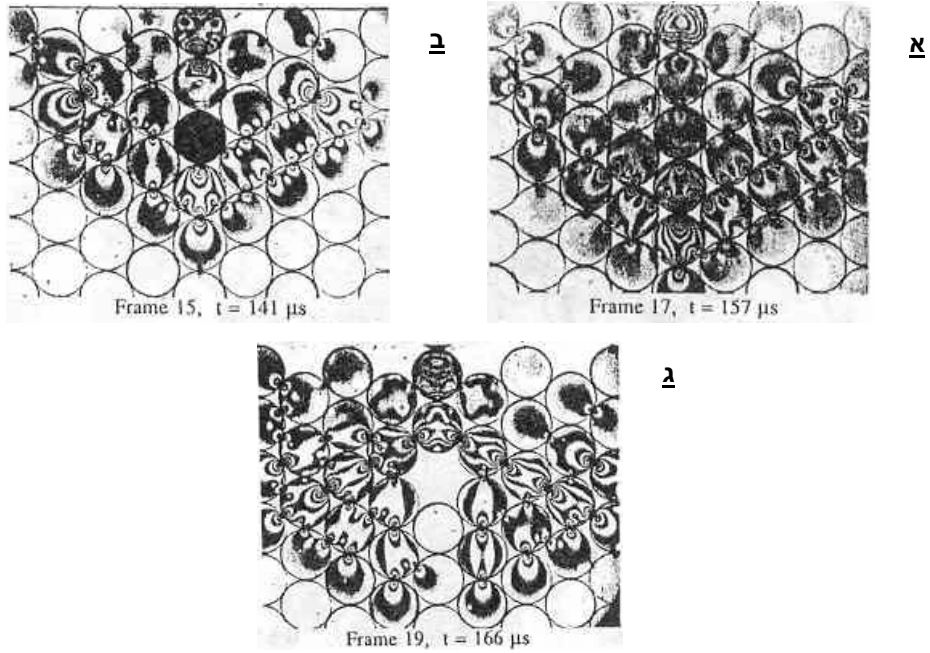


איור 8 זווית המוגדרת בין החלקיקים מציינת את כמות העומס המועבר לחלקיק.

עומס דרך נקודת המגע אלא שגם משך הגל (wave duration) גדל במעבר. כלומר אורך הגל (wave length) העובר תלוי בזווית וניתן לראות את התווך כמעין בורר גלים (wave guide). בהקשר זה מראים Shukla & Zhu (1988) כי בעת כל גידול בזווית שרשרת הדיסקות קטנה המהירות הממוצעת במורד השרשרת.

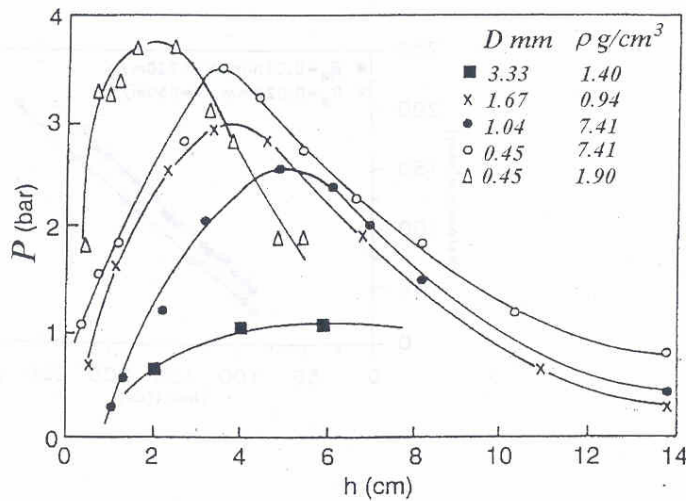
Sadd *et al.* (1989) ו Shukla *et al.* (1992) מראים כי העדר דיסקה ברצף (void), המצאות של דיסקה בעלת אימפדנס אקוסטי נמוך יותר משאר הדיסקות שבמבנה או המצאות של דיסקה בעלת אימפדנס אקוסטי גבוה יותר משאר הדיסקות שבמבנה (inclusion) יוצרים אי-הומוגניות במבנה. כאשר תופעה זו מופיעה במבנה HCP בשרשרת האנכית שמתחת לנקודת הפעלת העומס (איור 9) נגרם פיזור מוגבר של הגלים, דעיכה באמפליטודה ושינוי של פילוג המאמצים. התופעה מורגשת בשרשרת האנכית מתחת לנקודת אי-הומוגניות ובסביבתה אך מורגשת פחות רחוק מן הנקודה ובצידיה. אין שינוי במהירות הממוצעת של הגלים. כאשר חסרה דיסקה הפיזור נובע מהחזרות מרובות מהשפות החופשיות בחלל שנוצר וכאשר הדיסקה עשויה חומר קשיח יותר (אימפדנס אקוסטי גבוה יותר) ישנן החזרות מרובות מהדיסקה עצמה. ניתן להשליך תופעות אלה ללימוד תווך גרגרי הטרוגני.

<sup>2</sup> לעיתים נעשה בספרות שימוש בזווית המשלימה את הזווית המתוארת ל  $180^\circ$  כלומר הזווית בין שני הנורמלים המכונה גם זווית המגע.



איור 9 מבנה HCP תחת העמסה נקודתית על דיסקה אחת כאשר ב: (א) כל הדיסקות זהות (ב) דיסקה אחת בעלת אימפדנס אקוסטי גבוה יותר משאר הדיסקות (ג) דיסקה אחת חסרה. [Shukla et al. (1992)].

עבודה אחרת שנעשתה על ידי Britan et al. (1997) בדקה את האות המתקבל בתחתית מבנה גרגרי תלת-ממדי תחת העמסה דינמית. בעבודה זו נבדקו השינוי במספר ובעובי השכבות המרכיבות את המבנה. ניתן לראות מאיור 10 כי עבור חלקיקים בעלי מסה וקוטר שונה מתקבלת התנהגות דומה של פרופיל הלחץ. הכותבים מסבירים את העלייה ההתחלתית בגידול באנרצית המערכת עם הגידול במספר החלקיקים. עם העלייה במספר החלקיקים/שכבות גדלה גם השפעת החיכוך בין החלקיקים ועל הדפנות ועומס רב יותר מועבר לקירות. כאשר המבנה מספיק גבוה השפעת החיכוך הופכת דומיננטית ופחות כוח



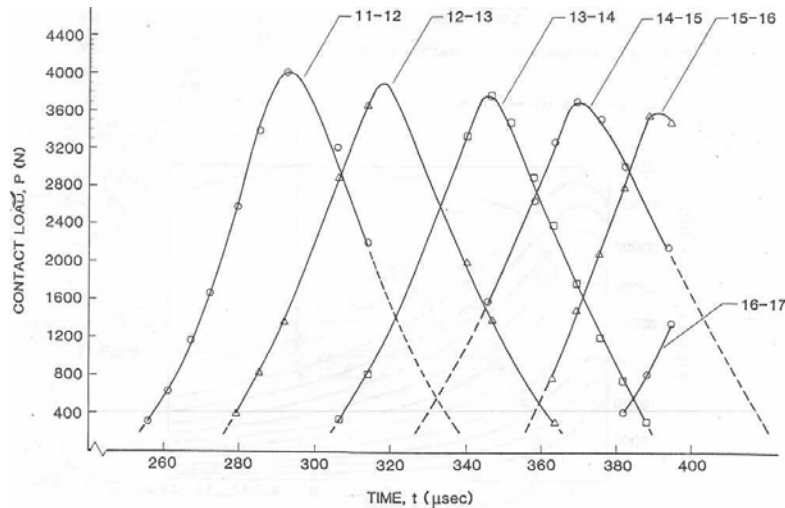
איור 10 לחץ מרבי בתחתית תווך גרגרי כפונקציה של גובה התווך [Britan et al. (1997)]

מועבר לתחתית המבנה.

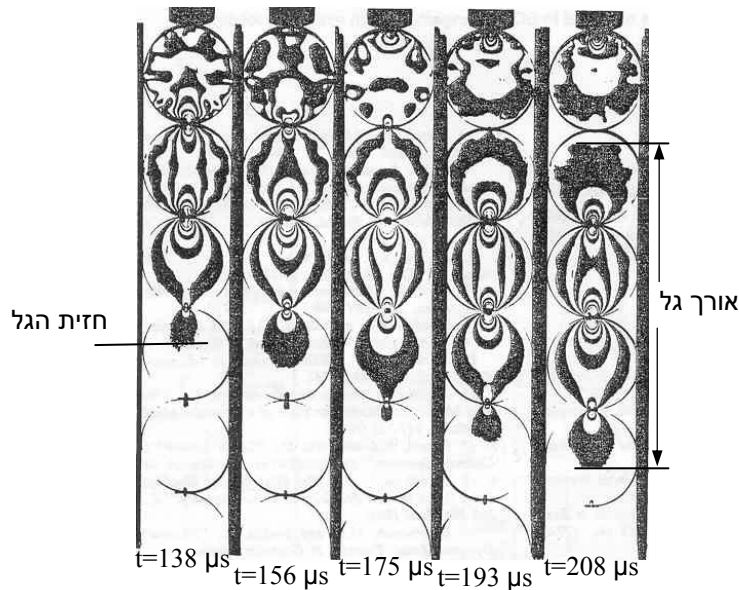
העבודה הניסויית הרבה שנעשתה על מבנים דו-ממדים ממחישה את אופייה המסובך של הבעיה. שאלות שונות כגון חקירה של השפעת החיכוך שעל קירות המבנה או תצורת הגלים המוחזרים בתוך התווך הגרגרי נותרו עדיין עם תשובה חלקית. ניתן לראות שההבנה כי העברת העומס קשורה במיקרו-מבנה של התווך, מושכת את החוקרים ליצור ולבדוק מבנים מסודרים בצורות שונות בכדי לאפיין התנהגות פרמטר מסוים ואז להשליך לגבי מבנים אקראיים. מכאן גם נובע העניין במבנה של שרשרת יחידה שהוא כאמור המבנה הגרגרי הבסיסי ביותר.

#### 1.2.1.2.2 העמסה דינמית של תווך גרגרי חד-ממדי

בבואנו לסקור את המחקר הקיים על העמסה דינמית של שרשרת ישרה יחידה נציין כי מסקנות כלליות שהוסקו עבור מבנים דו-ממדים תקפות גם כאן. ראשית נביט במאפיינים שונים של התהליך. Shukla & Damania (1987) מראים כי מהירות התקדמות הגל בתווך גרגרי נמוכה באופן משמעותי ממהירותו בתווך רציף העשוי מאותו חומר. ראוי לציין כי מהירות הגל בדיסקה הראשונה לפני נקודת המגע הראשונה דומה מאד למהירותו בתווך רציף. הכותבים מוסיפים כי גם עוצמת הגל קטנה. מתוך פרופיל הגל בנקודות המגע המוצג באיור 11 ניתן לראות את הדעיכה שעובר גל זה עם התקדמותו במורד השרשרת. דעיכת הגל חזקה מאד בדיסקות הראשונות (20% בחמש הדיסקות החל מהדיסקה השניה לעומת 2% עבור אותו מרחק בתווך רציף) והופכת הדרגתית יותר בהמשך. איבוד האנרגיה הגדול



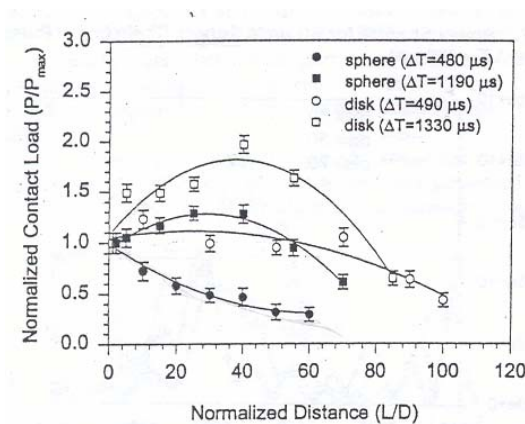
איור 11 פרופיל כוח המגע כתלות בזמן במגעים שונים. מתוך ניסוי פוטואלסטי על שרשרת ישרה בת 20 דיסקות בקוטר 25.4mm [Shukla & Damania (1987)].



איור 12 פסים איזוכרומטים המתקבלים בניסוי פוטואלסטי על שרשרת ישרה יחידה בזמנים שונים [Shukla & Damania (1987)].

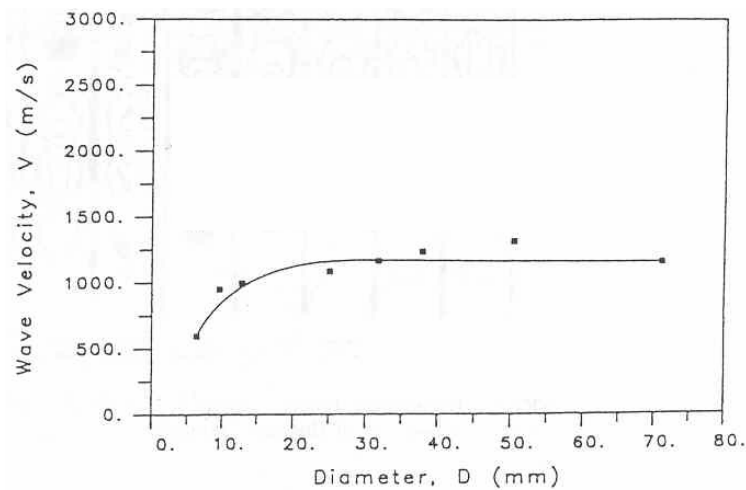
במבנים גרגריים נובע לדעת המחברים מהצורך בסגירת המגעים בין הדיסקות, חיכוך בין הדיסקות והחזרות מהדפנות החופשיות של הדיסקות ומהמגעים שביניהם. באיור 12 ניתן לראות דוגמה לסדרה של תמונות מתוך ניסוי של העמסת תווך גרגרי חד-ממדי. אורך הגל המוצג בתמונה נקבע על פי המרחק בין חזית הגל לנקודה שאחריה לא מתקיים מגע בין הדיסקות.

Zhu *et al.* (1997) ערכו השוואה בין התקדמות גלים בשרשרת ישרה של חלקיקים כדוריים (spheres) ושל דיסקות. הם הראו כי המהירות הממוצעת בדיסקות גבוהה יותר ודעיכת האותות בהן איטית יותר כמוראה באיור 13. הגלים המתקדמים בשרשרת של כדורים עוברים דיספרסיה משמעותית ביחס לגלים המתקדמים בשרשרת הדיסקות. ניכר כי לצורה התלת-ממדית של הכדורים השפעה חזקה על תכונות אלה.

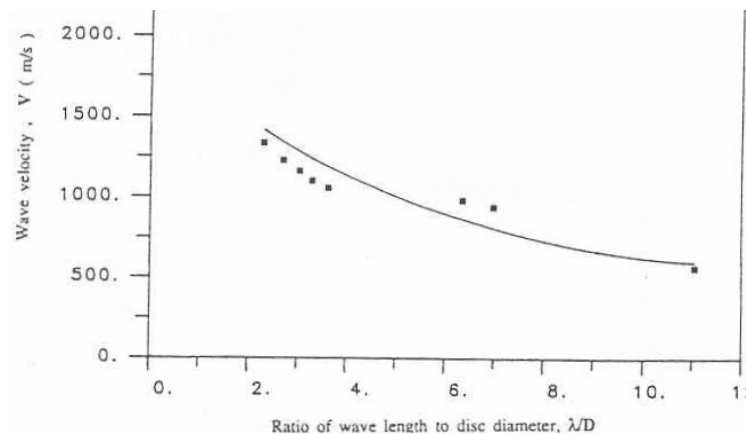


איור 13 דעיכת כוח המגע המנומל בשרשרת ישרה יחידה של כדורים ודיסקות תחת אות כניסה באורכים שונים [Zhu *et al.* (1997)].

בשלב הבא נסקור כיצד משפיעים שינויים בגיאומטריה הדיסקות על פרמטרים שונים. Shukla & Damania (1987) משלבים שימוש במדידי עיבור<sup>3</sup> (strain gauges) ומראים כי מהירות הגל שחושבה באמצעי המדידה השונים גדולה יותר בשרשרת שבה דיסקות גדולות יותר. נראה כי כמות המגעים בדרכו של הגל משפיעה על מהירותו. מבחינה ניסויית כמעט ולא נמצאו הבדלים בין התוצאות מהשיטה הפוטואולסטי וממדידי העיבור. Xu & Shukla (1990) הרחיבו את המחקר בנושא השפעת שינוי קוטר הדיסקות על מהירות ההתקדמות של גל המאמץ (stress wave) בשרשרת ישרה. הם מצאו כי בתחילה המהירות הממוצעת עולה עם העליה בקוטר ולאחר מכן היא מתכנסת לערך כמעט קבוע (איור 14).



איור 14 מהירות ממוצעת כתלות בקוטר הדיסקה [ Xu & Shukla (1990) ].

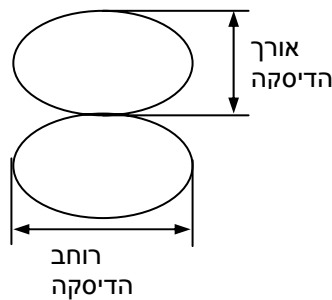


איור 15 מהירות ממוצעת כתלות ביחס בין אורך הגל לקוטר הדיסקה [ Xu & Shukla (1990) ].

<sup>3</sup> המדידים מודבקים כ 5-6 mm מנקודת המגע בכדי להתרחק מאזורים של גרדיאנטים גדולים בשדה המאמצים.



לטענתם ערכה הקבוע של מהירות גל המאמץ היא 40%-50% ממהירות הגל בתווך רציף. בנוסף הם מוצאים כי אורך הגל עולה בצורה עקבית עם העליה בקוטר הדיסקות אך בצורה איטית יותר. מכאן הם מקבלים כי באופן כללי מהירות הגל קטנה עם העליה ביחס בין אורך הגל לקוטר הדיסקה (איור 15). בצורה שונה מעט הם מצביעים על כך שיחס זה נשמר כמעט קבוע כאשר המהירות מתכנסת. יחס זה מוצע כפרמטר המאפיין את המערכת. Shukla *et al.* (1993a) בדקו את השפעת צורת החלקיקים על העברת העומס על ידי עריכת ניסויים בשרשרת ישרה העשויה מדיסקות אליפטיות. הדיסקות הוצבו כך שהציר האנכי מקביל לכיוון ההעמסה והוא זה שנשמר קבוע באורכו (יקרא אורך הדיסקה) בעוד הציר הניצב לו (הציר האופקי) השתנה באורכו בין הניסויים (יקרא רוחב הדיסקה), כלומר רוחב הדיסקות משתנה (איור 16).

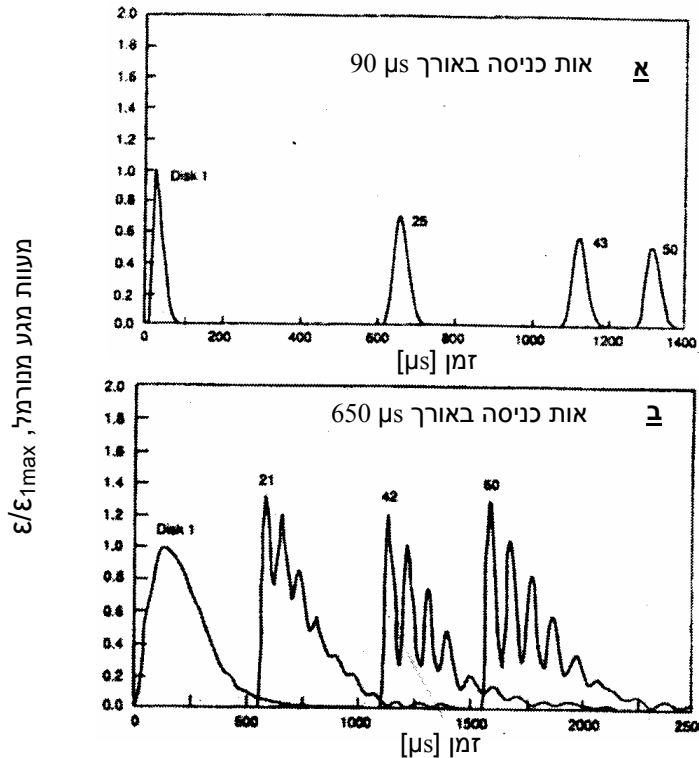


איור 16 הגדרת דיסקות אליפטיות בעלות רוחב משתנה.

מניסוי זה התקבל שכל עוד המרחק בין המגעים (אורך הדיסקה) נשמר קבוע אורך הגל כמעט ולא השתנה בהשוואה לאורך הגל בדיסקות עגולות (בקוטר אורך הדיסקה). לעומת זאת עם העליה ברוחב הדיסקה קטנה המהירות הממוצעת של הגל למרות שגדל רדיוס העקמומיות בנקודת המגע וגדלה קשיחות המגע. תופעה זו הוסברה בכך שהגידול במסה ליחידת מרחק עם הגידול ברוחב הדיסקה הוא הגורם המשפיע ומכאן שבדיסקות הרחבות יותר דעיכת הגל היתה גדולה ומהירה יותר כתלות במרחק. בנוסף נחקרה השפעת פני השטח על ידי יצור דיסקות בעלות פני שטח גסים ברמות חספוס שונות. עבור פני שטח גסים יותר נמצא כי המהירות הממוצעת בשרשרת היתה נמוכה יותר. קצוות חדים באזור המגע נשברו בזמן הפעלת העומס ויצרו שינויים בין מגע אחד לשני. נמצא גם כי אורך הגל בדיסקות אלה היה קצר מזה המתקדם בדיסקות חלקות.

אחרי שנכחנו בהשפעה הגדולה של המיקרו-מבנה על התקדמות הגלים בתווך הגרגרי נתייחס להשפעת אותות העמסה בעלי משך זמן שונה ואנרגיה דומה על התקדמות הגלים בתווך. Shukla *et al.* (1993b) ו Zhu *et al.* (1997) ערכו ניסוי עם שרשראות אופקיות וטענו כי שרשראות ישרות יחידות שמשו כבוררות גלים. לכל מבנה אורך אות אופייני התלוי במיקרו-מבנה שלו. אות באורך זה התקדם בשרשרת כמעט ללא שינוי צורה (פיזור-

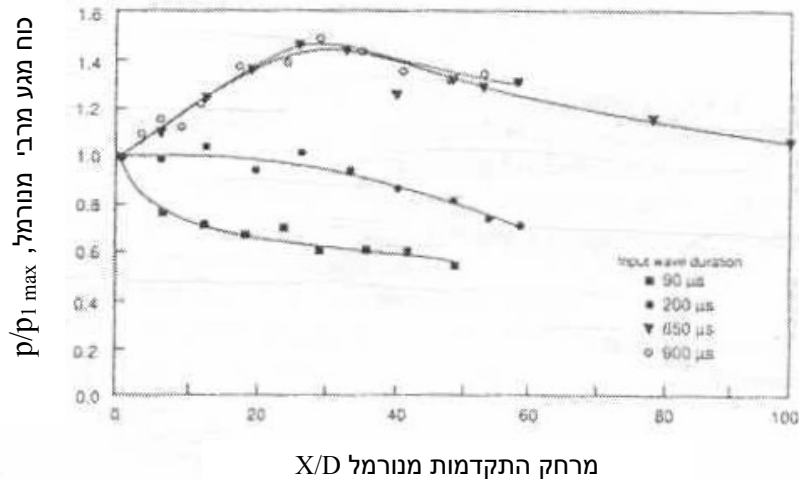
דיספרסיה). הכותבים הראו לדוגמא, כי אות כניסה קצר בעל משך של  $90\mu\text{s}$  התקדם  
בשרשרת שלהם עם מעט פיזור ובדעיכה קבועה (איור 17 (א) ואיור 18). עבור אותות כניסה



איור 17 מעוות מגע מנורמל מתוך מדידי עיבור בשרשרת ישרה יחידה עבור אות כניסה באורך (א)  $90\mu\text{s}$   
(ב)  $650\mu\text{s}$  [Shukla et al. (1993)].

ארוכים יותר מהאות האופייני של המבנה וארוכים יותר מערך כלשהו ניתן לראות באיור  
17 (ב) כי הגל הראשי מתפרק לסדרה של גלים בעלי אורך גל קצר יותר (short oscillatory waves).  
תופעה זו מכונה על ידי הכותבים בשם ringing behavior או ringing separation. אורכי הגל של האותות החדשים דומים לאורך הגל האופייני של המבנה. פירוק האות המקורי  
מציין חלוקה מחדש של האנרגיה בגל. חלוקה זו יוצרת מצב שבו תמיד אחד האותות אחרי  
הפירוק יהיה בעל אמפליטודה גדולה יותר. אין הכרח שיהיה זה האות הראשון אחרי הפירוק  
אך נראה כי עם ההתקדמות בשרשרת האות בעל האמפליטודה הגדולה אוסף יותר אנרגיה  
ובכך הופך למהיר יותר ובסופו של דבר הוא תמיד יהפוך להיות הראשון בסדרת האותות.  
איסוף האנרגיה גם יוצר הגברה של אמפליטודת הכוח המקורי בכניסה. ככל שאות הכניסה  
ארוך יותר התפרקות האות המקורי תהיה ארוכה יותר. הכותבים גם הראו (איור 18) כי בעוד  
שעבור אות כניסה קצר ניתן לראות דעיכה של כוח המגע המרבי החל מהרגע הראשון הרי  
שעבור אות כניסה ארוך תהיה ראשית עליה בגודל האות ורק אחר כך ירידה. באיור 18 ניתן  
גם לראות כי יתכן מצב, כמו עבור אות הכניסה בעל משך של  $200\mu\text{s}$ , שבו כוח המגע המרבי

דועך בצורה איטית מאד. הכותבים מציינים גם כי המהירות הממוצעת בשרשרת, קטנה עם העליה במשך אות הכניסה. מעניין לציין את הדמיון בין איור 18 ואיור 13 לאיור 10. למרות שהמקור וההסבר שונים יתכן כי מדובר בתופעה דומה.



איור 18 שינוי כוח המגע המרבי המנורמל עם ההתקדמות במורד השרשרת עבור אותות כניסה באורכים שונים [Shukla et al. (1993b)].

בעבודה הוצגה גם אנליזה של הגלים במישור התדר (FFT). ניתן היה לראות כי פירוק האותות הארוכים זוהה על ידי מעבר אנרגיה מתדרים נמוכים לפני הפירוק לתדרים גבוהים יותר אחריו.

לסיום מתואר ניסיון לבדוק את תוצאות הניסוי אל מול תיאוריה המתארת התקדמות גלים לא-ליניאריים בתווך גרגרי. המודל החוזה התקדמות של גלים 'בודדים' (solitons) בתווך גרגרי אליו נעשתה ההשוואה פותח על ידי Nesterenko (1983) (סעיף 1.2.2.1.2). העבודה הניסויית על שרשראות בודדות הניבה נכון להיום תוצאות רבות ומעניינות על אופיו של התווך הגרגרי. צורת הגל, מהירותו, אורכו, אופן הדעיכה שלו, אופן הפיזור שלו ומאפיינים נוספים, הם פרמטרים הנבדקים בכדי ללמוד השפעת גורם זה או אחר על התקדמות גלים בשרשרת ישרה. תוצאות אלה נוצלו במקרים רבים לכיול ואימות של מודלים נומריים ואנליטיים.

**1.2.2 מודלים לתיאור התקדמות גלים בתווך אלסטי לינארי רציף ובתווך גרגרי**  
 בכדי לקבל תמונה כללית של הבעיה שלפנינו נתייחס לתיאורים אנליטיים ונומריים הקיימים בספרות עבור התקדמות גלים במקרים שונים.

### 1.2.2.1 מודלים אנליטיים

המודלים האנליטיים לתיאור התקדמות אותות מכניים בתווך אלסטי לינארי רציף מבוססים על משוואת הגלים הלינארית והם מודלים שמהימנותם הוכחה בספרות פעמים רבות. לעומתם המודלים הבאים לתאר תווך גרגרי משתמשים במשוואות גלים לא לינאריות הכוללות גם פתרונות של solitons. העבודה לביסוסם של מודלים אלה היא עבודה של השנים האחרונות והיא עדיין מרתקת חוקרים של תופעות לא לינאריות בתחומים שונים.

#### 1.2.2.1.1 התקדמות גלים בתווך אלסטי לינארי איזוטרופי רציף

Timoshenko & Goodier (1970) מראים כי משוואות התנועה בתווך אלסטי, לינארי

איזוטרופי כאשר הן מובעות בעזרת תזוזות וללא כוחות גוף נראות בצורה הבאה:

$$\begin{aligned}(\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial x} + \mu \nabla^2 u &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\(\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial y} + \mu \nabla^2 v &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\(\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial z} + \mu \nabla^2 w &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\end{aligned}\quad (1.2.1)$$

כאשר  $w$  ו  $v, u$  הן התזוזות בכיוונים  $z$  ו  $y, x$  בהתאמה,  $\lambda$  ו  $\mu$  הם קבועי Lamé ו  $e$  מייצגת את ההתפשטות הנפחית.

ניתן להבחין בשני מקרים, האחד כאשר הדפורמציות הנוצרות עקב תנועת הגלים בגוף אינן מלוות בשינוי נפח והשני כאשר הדפורמציות אינן מלוות ברוטציה (שינוי צורה). עבור המקרה הראשון מתקבלת בכיוון  $x$  משוואת גלים לינארית מהצורה:

$$\mu \nabla^2 u = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1.2.2)$$

מהירות גלי הגזירה (גלים שווי נפח) בגוף בעל מודול אלסטיות לגזירה  $G$ , תהיה עם כן:

$$c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (1.2.3)$$

גלי הגזירה מתאפיינים בכך שהם יוצרים תנועת חלקיקים בניצב לכיוון ההתקדמות שלהם. עבור המקרה השני מתקבלת המשוואה הלינארית הבאה:

$$(\lambda + 2\mu) \nabla^2 u = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1.2.4)$$

ממשוואה זו מתקבלת מהירות הגל האורכי בחומר.

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho}} = \sqrt{\frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)\rho}} \quad (1.2.5)$$

כאשר  $E$  ו  $\nu$  מודול האלסטיות ויחס פואסון בהתאמה. גל זה מתאפיין בכך שהוא יוצר תנועת

חלקיקים במקביל לכיוון ההתקדמות שלו.

כאשר ההפרעה נוצרת בגוף בעל שפות חופשיות יתכן שיתקדמו בגוף גם גלים בעלי מהירות שונה. לדוגמא, גלי שטח (surface waves), יופיעו על דפנות הגוף בשכבה דקה מאד כאשר עצמתם דועכת בצורה אקספוננציאלית בכיוון מרכז הגוף. Rayleigh היה הראשון להבחין בגלים אלה ולזהות אותם עם הגלים הנוצרים בעת רעידת אדמה. גלים אלה נושאים את שמו, גלי Rayleigh. בכדי לקבל את מהירות גלי Rayleigh,  $c_3$ , הוגדר הפרמטר  $\xi = c_3/c_2$  כאשר  $\xi$  מתקבל מתוך המשוואה הבאה:

$$\xi^6 - 8\xi^4 + 8\left(3 - \frac{1-2\nu}{1-\nu}\right)\xi^2 - 16\left(1 - \frac{1-2\nu}{1-\nu}\right) = 0 \quad (1.2.6)$$

עבור כל  $\nu$  נקבל שמהירות גלי Rayleigh נמוכה מעט ממהירות גלי הגזירה. הגלים שהוזכרו נוצרים כולם מאותו מקור היוצר את ההפרעה ומתקדמים כל אחד במהירות ובכיוון המיוחדים לו. גלים נוספים נוצרים במפגש של הגלים האורכיים וגלי הגזירה עם השפות החופשיות אך לא נרחיב את הדיבור בנושא זה.

אם נביט בפלטה חצי אינסופית שבמרכז השפה החופשית שלה נוצרת הפרעה נוכל לראות כי כל עוד מקור ההפרעה קיים הגלים הנוצרים רוכבים אחד על השני וההבדל ביניהם נראה רק בחזיתות הנעות במהירויות שונות. כאשר מקור ההפרעה אינו קיים יותר נוצר שלב מעבר קצר שבו עדיין קיימת חפיפה חלקית בין הגלים ולאחריו נוצרת ביניהם הפרדה מלאה [Durelli & Riley (1965)].

אם נביט בקורה דקה נוכל לומר כי גלי הדחיסה והריווח הם גלים אורכיים הנעים בפלטה. ראשית נביט במצבים הנוצרים עבור תנועת גל דחיסה. במקרה הראשון גל דחיסה הנוצר בקצה אחד של הפלטה פוגע בקצה השני שלה הגובל בתווך בעל אימפדנס אקוסטי גבוה מזה של הפלטה. עקב הפגיעה מוחזר גל דחיסה המגדיל את האמפליטודה שלו עד פי שתיים מזו של הגל הפוגע ומהירות החלקיקים אחרי חזית הגל תתקרב לאפס. במקרה השני גל הדחיסה פוגע בשפה חופשית עליה מושרה לחץ דחיסה הנמוך מהלחץ המזוהה עם אמפליטודת הגל. אמפליטודת הגל המוחזר תרד עד ללחץ על השפה ומהירות החלקיקים תעלה. הגל המוחזר הוא גל ריווח. גם עבור גל ריווח ניתן להביט בשני מקרים. במקרה הראשון גל הריווח פוגע בשפה הגובלת בתווך בעל אימפדנס אקוסטי גבוה מזה של הפלטה. גל הריווח המוחזר במקרה זה יהיה בעל עוצמת ריווח גבוהה יותר. במקרה השני כאשר גל הריווח פוגע בשפה חופשית הגובלת בתווך בעל אימפדנס אקוסטי נמוך מזה של הפלטה יוחזר גל דחיסה באמפליטודה של הלחץ המושרה על השפה.

### 1.2.2.1.2 התקדמות גלים בתווך גרגרי

נניח בסקירה זו שהחומר ממנו עשויים הגרגרים הוא חומר אלסטי ליניארי ואיזוטרופי.

Shukla & Rossmannith (1986) הראו באמצעות פוטואלסטיות דינמית כי כאשר גלים

המתקדמים בתוך דיסקה מגיעים לנקודת מגע עם דיסקה נוספת חלקם ממשיכים לדיסקה זו וחלקם מוחזרים. כלומר חלק מהאנרגיה ממשיך להתקדם וחלק מוחזר. חוקרים רבים הראו כי למרות שחומר החלקיקים מתנהג בצורה ליניארית המבנה הגרגרי יכול להתנהג בצורה לא ליניארית גם עבור דפורמציות קטנות. אי-ליניאריות זו נובעת מחוק המגע של Hertz (סעיף 2.1) והיא קשורה בגיאומטריית המגע. הערכה ראשונה למהירות התקדמות הגלים בתוך גרגרי ניתנה על ידי Iida (1939) כאשר מתוך משוואת הגלים הליניארית עבור מערכת של קפיצים ומסות קשיחות התקבל כי

$$V = d \sqrt{\frac{K}{m}} \quad (1.2.7)$$

כאשר  $V$  היא מהירות הגל,  $d$  הוא המרחק בין המרכזים של שני חלקיקים במגע,  $K$  היא קשיחות המגע ו  $m$  היא מסת החלקיק.

Nesterenko (2001) הראה כי אי-הליניאריות אינה מאפשרת שימוש במשוואת הגלים הליניארית לתיאור של התקדמות האותות בשרשרת אופקית ישרה של חלקיקים עגולים. מתוך פיתוח של משוואת גלים לא-ליניארית המבוססת על חוק המגע של Hertz, הראה הכותב כי בשרשרת תחת כוח סטטי התחלתי  $F_0$  והתקרבות התחלתית בין החלקיקים  $\delta_0$  הנובעת מכוח זה, יוצרו solitary waves או solitons. גלים אלה יכולים להתקדם לאורך זמן ללא שינוי צורה. תופעה זו נחזתה גם על ידי משוואות KdV (1985) הלא-ליניאריות אך עבור solitons בעלי אורך שונה. בעבודה זו גם נחזה פירוק של אות ארוך לסדרה של אותות קצרים כאשר כל אות התקדם עם אמפליטודה ומהירות האופיינית לו. התקבל כי האות בעל האמפליטודה הגבוהה יותר נע מהר יותר. Nesterenko גם הציג ביטוי למהירות הקול התלויה בדפורמציה ההתחלתית עקב הכוח הסטטי. מביטוי זה התקבל כי כאשר הדפורמציה ההתחלתית שווה לאפס גם מהירות הקול בתווך שווה לאפס. מצב זה מכונה sonic vacuum והוא מתאים לכל שרשרת חלקיקים שבה לא קיים לחץ התחלתי (pre-stress). הכותב נתן גם ביטוי לצורת ה soliton וכן למהירותו  $v_s$  כתלות במהירות הגל האורכי בתווך רציף  $c_1$  ומהירות החלקיקים בחומר  $v_m$ .

$$v_s = \left(\frac{16}{25}\right)^{1/5} c_1^{4/5} v_m^{1/5} \quad (1.2.8)$$

Hong (2002) בחן היווצרות של solitons בשרשרת אנכית ולכן הכיל במשוואת התנועה שלו את איבר הכבידה. הוא הראה כי עבור ערעור חלש האותות המתקדמים בשרשרת תונדים דועכים ומתפזרים. לטענתו תופעה זו נובעת מהשפעת הכבידה על קשיחות המגע. חשוב לציין כי המודלים האנליטיים מתייחסים במקרה של המבנה הגרגרי לשרשרת של חלקיקים ואין בנמצא מודלים עבור תווך דו ותלת-ממדי. מודלים לתיאור התכונות בתווך רב-

ממדי ובתווך אמיתי (אקראי) יתבססו בדרך כלל על שיטות סטטיסטיות ונומריות.

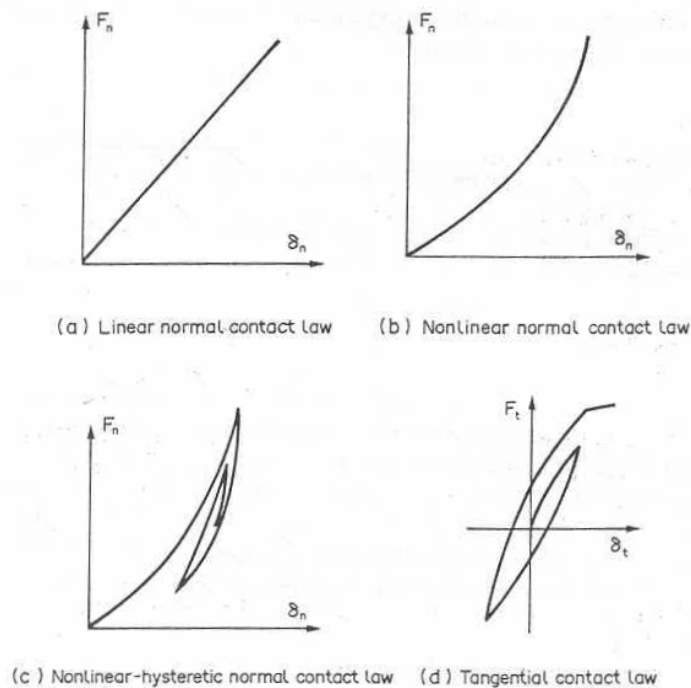
### 1.2.2.2 עבודה נומרית

לאור העבודה הרבה שנעשתה בניסיון לתאר את ההתנהגות המכנית של מבנים גרגריים באמצעות מודלים רציפים או תוך שימוש בתיאוריות סטטיסטיות שונות, הגיעו חוקרים רבים למסקנה שטכניקות נומריות עקב גמישותן העדיפה הן הדרך הטובה ביותר למידול מבנים אלה. בסקירה זו נביט בשתי טכניקות שונות המדווחות בספרות ועבור שתיהן ישנה גם השוואה לתוצאות שהתקבלו מתוך ניסוי שנעשה באמצעות השיטה הפוטואלסטית. Cundall & Strack (1979) פרסמו סיכום למודל נומרי לגראנז' בשם distinct element method (DEM) (מופיע לעיתים גם כ- discrete element method) השייך למשפחת הטכניקות הפועלות ללא רשת חישוב (meshless method). המודל פותח על ידי Cundall ופורסם במספר מאמרים החל משנת 1971. מטרת ה DEM היא לתאר את ההתנהגות המכנית של מבנים הבנויים מדיסקות וכדורים והוא פותח בכדי לעזור בפתרון בעיות במכניקת סלעים (rock mechanics). סכימה מפורשת (explicit) מתארת את הקשר (interaction) בין החלקיקים מגע אחרי מגע ואת תזוזות החלקיקים חלקיק אחר חלקיק. הסכימה המפורשת יעילה מבחינת ניצול משאבי מחשב ובכך מאפשרת מידול מספר רב של חלקיקים. המודל מניח כי דפורמצית חלקיק בודד קטנה בהשוואה לדפורמצית המבנה כולו. מכאן שניתן למדל את דפורמצית המבנה מתוך תנועת החלקיקים כאשר מתייחסים לחלקיקים כגופים קשיחים. אין צורך במידול דפורמצית החלקיקים בכדי לקבל הערכה טובה של ההתנהגות המכנית של המבנה. בכדי לקבל את אפקט הדפורמציה ואת קשר המגע מותר לחלקיקים לחפוף אחד את השני ומגע יוגדר כאשר המרחק בין מרכזי החלקיקים יהיה קטן מסכום הרדיוסים שלהם. חפיפה זו קשורה באופן ישיר לכוח המגע ולכן היא גם קטנה מאד ביחס לגודל החלקיק. צעד הזמן בחישוב נבחר כך שבמהלכו ניתן להניח כי המהירויות והתאוצות קבועות. מכאן גם שצעד זמן יהיה מספיק קצר כך שבמהלכו ההפרעה לא תתקדם יותר מאשר מחלקיק אחד לחלקיק השכן לו. בצורה זו מובטח כי הכוחות המחושבים נוצרים רק עקב קשר בין חלקיק כלשהו לחלקיקים אחרים המצויים עימו במגע וכן שישנו מעקב רציף אחרי התפתחות כוחות אלה. המודל מורכב משתי משוואות עיקריות, החוק השני של ניוטון מאפשר את תנועת החלקיקים עקב הכוחות הקיימים וקשר ליניארי של כוח-תזוזה (קשר מגע) מאפשר למצוא את כוחות המגע בין החלקיקים תוך שימוש בתזוזות שחושבו. קשרי המגע קיימים בכיוון הנורמלי והם תלויים בקבועי קשיחות בכיוונים אלה. קשרי מגע אלה אינם מאפשרים הפרדה בין חלקיקים. בנוסף קיימים שני סוגי ריסון, ריסון מקומי התלוי במהירות היחסית של החלקיקים וריסון כללי התלוי במהירות האבסולוטית שלהם. ניתן לומר כי הריסון המקומי מייצג הפסדים הקשורים במכניזם המגע כגון אי-אלסטיות של האזור ואילו

הריסון הכללי מביא בחשבון הפסדים הנובעים מתנועה בתווך רווי שם קיימת התנגדות להתקדמות החלקיק כולו.

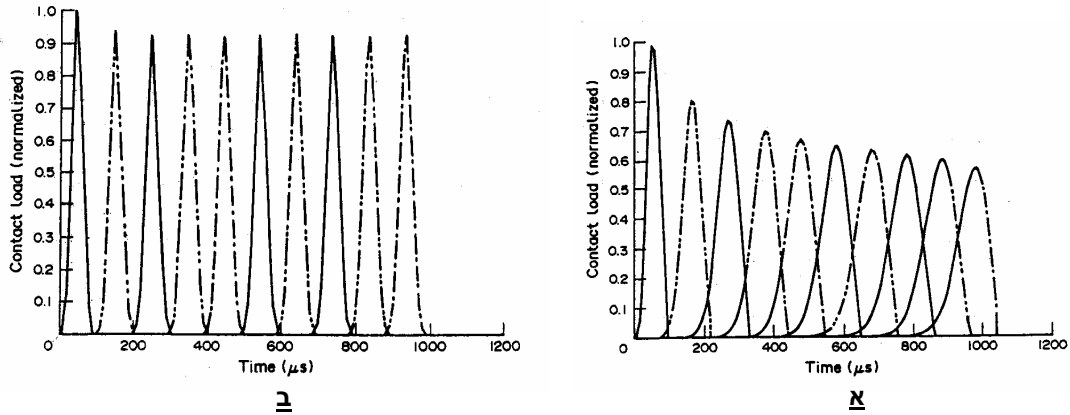
(Sadd *et al.* (1989) ו Shukla *et al.* (1990) הציגו השוואה בין תוצאות נומריות וניסוייות עבור מהירות הגל וכוח המגע המרבי במגעים השונים בתוך מבנים חד-ממדים ודו-ממדים. הקבועים למודל הנומרי נלקחו מתוך תוצאות של ניסויים פוטואלסטיים בשרשרת יחידה ישרה. היות ובניסוי אובחן כי רוב הכוח מועבר בכיוון נורמלי למגע לא נעשה שימוש בכוח מגע משיקי. היות ומדובר בתווך גרגרי יבש גם לא נעשה שימוש בריסון כללי. אי-ההתאמה בין התוצאות של כוח המגע היתה של יותר מ- 5% בממוצע עבור מבנים מסודרים ושל יותר מ-15% עבור מבנים בסידור אקראי. אי-ההתאמה של 10% הושגה עבור המהירות הממוצעת של הגל בחומר.

(Sadd *et al.* (1993) בדקו את התאמתם של קשרי מגע שונים (איור 19) לתיאור התוצאות הניסוייות. הכותבים ציינו כי קשר מגע מתאים צריך להכיל את קשיחות המגע המתאימה הקובעת את מהירות הגל, ומנגנון מתאים לאיבוד אנרגיה (dissipation mechanism) שישלוט בדעיכת הגל. המאפיינים על פיהם יש לבחון את התאמת התוצאות יהיו המהירות הממוצעת של הגל, צורת הדעיכה של הגל עם התקדמותו והפיזור (דיספרסיה) של הגל. בתחילה נבדקו שני מודלים כאשר אחד עם קשר מגע ליניארי [איור 19(a)], השני עם קשר מגע לא ליניארי [איור 19(b)] ושניהם עם ריסון ליניארי התלוי במהירות החלקיקים. בשני המקרים ניתן להתאים את המהירות הממוצעת ואת דעיכת הגל אך הפיזור היה גדול בהשוואה לניסוי.



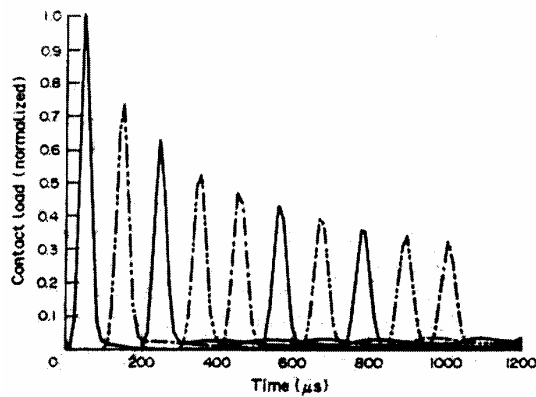
איור 19 קשרי מגע שונים [Sadd *et al.* (1993)].





איור 20 כוח מגע מנורמל בשרשרת בת 40 דיסקות. מתוך הדמיה ללא מנגנון ריסון כאשר קשר המגע הוא ליניארי (א) ליניארי (ב) לא-ליניארי.

בבדיקת הקשר הליניארי ללא ריסון נמצא כי תתכן דעיכה של האות מבלי שהמודל יכיל מנגנון הבולע אנרגיה [איור 20 (א)]. התברר כי יתכן שמתוך החישוב הנומרי ייוצר מצב של דעיכת האות וגידול בפיזור כאשר סך האנרגיה נשאר קבוע. מקרה נוסף התרחש בעת בדיקת הקשר הלא ליניארי ללא ריסון [איור 20 (ב)]. הפעם היה שינוי קל בצורת האות, הכרוך בדעיכה קלה ובפיזור קל, לפני שהוא הפך אחיד בשאר השרשרת. שינוי זה אינו מוסבר כתופעה נומרית אלא כשינוי צורה פיזיקלי שעובר האות עד להתייצבותו. בהמשך, הצביעו המחברים כי ריסון התלוי במהירות מלמד על ויסקוסיות מסוימת בחומר אך נוכחותו של מנגנון זה לא ניכרה בחומר ששימש בניסוי. לכן הוצע מעבר לריסון התלוי בדפורמציה. בכדי לתאר מכניזם זה הוצג קשר מגע לא-ליניארי עם היסטריזיס (חשל) [איור 19 (c)]. למעלה מארבעה פרמטרים נדרשו לאיפיון הקשר אך שימוש בקשר מגע זה ביטל את הצורך להשתמש בכל מנגנון אחר ולמעשה כל המנגנונים הנדרשים כולל תכונות החומר מצויים כעת בקשר המגע.

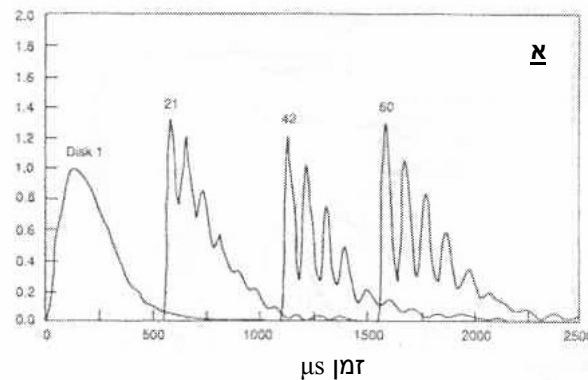


איור 21 כוח מגע מנורמל בשרשרת בת 40 דיסקות. מתוך הדמיה עם קשר מגע לא-ליניארי הכולל היסטריזיס

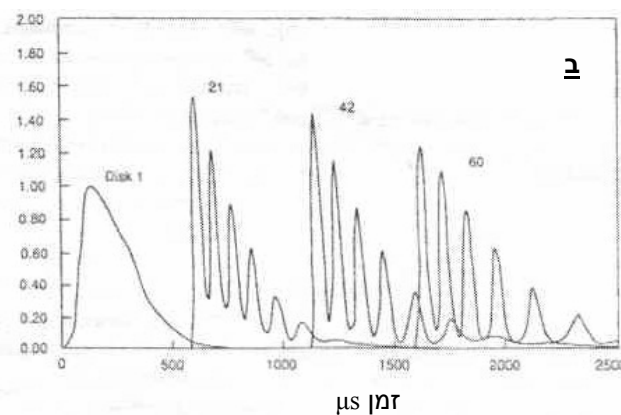
נמצא כי קשר זה מדמה בצורה הטובה ביותר את התקדמות גל המאמצים בין החלקיקים על פי האופיינים שנבדקו (איור 21). נראה כי ההיסטרזיס מחליף בצורה מוצלחת את מנגנון הריסון כמנגנון בליעת האנרגיה הנדרש במערכת. בנוסף הוקנה למודל גם קשר מגע משיקי מהצורה שהוצעה על ידי Walton *et al.* (1991). הקבועים השונים עדיין נלקחו מניסוי הכיול וחלקם תלויים בצורת החלקיקים, לכן יש להתאים לכל מבנה בעל צורת דיסקות שונה את הקבועים המתאימים. הכותבים דיווחו על אי-התאמה של 5% ופחות עבור כוח המגע המרבי, מהירות הגל הממוצעת והיחס בין אורך הגל לקוטר הדיסקה בשרשרת ישרה. מסתבר גם, כי הוספת כוח מגע משיקי שיפרה את ההתאמה במבנים דו-ממדים עבור כוח מגע מרבי כך שההפרש הממוצע בין ניסוי וסימולציה יהיה קטן מ 15%. חשוב לציין כי התוצאות שהתקבלו בשלב זה הסכימו עם יותר פרמטרים פיזיקליים מתוך הניסוי.

Shukla *et al.* (1993a) עשו שימוש בקשר המגע הלא-ליניארי עם היסטרזיס גם בשרשראות של חלקיקים אליפטיים עם יחסים שונים של רוחב לאורך חלקיק. התוצאות שהתקבלו דומות לאלו שהתקבלו בניסוי. בעבודה נוספת של Shukla *et al.* (1993b) נבחן השימוש ב DEM עבור אותות כניסה ארוכים. נמצא כי המודל חזה בצורה יפה את שבירת

מעוות במגע מנומל לפי מעוות מרבי  
במגע 1



כוח במגע, מנומל לפי כוח מרבי במגע



איור 22 השוואת פרופיל האות בהעמסה ארוכה ( $650\mu s$ ) עבור תוצאה (א) ניסויית (ב) נומרית [Shukla *et al.* (1993)].

האות לאותות קצרים יותר (איור 22) והצליח לחזות בקירוב טוב את משך הזמן של האותות החדשים. בנוסף המודל גם הצליח לחזות בצורה איכותית את התנהגות כוח המגע הנורמלי המרבי לאורך השרשרת עבור אותות כניסה בעלי משך זמן שונה. (Sadd *et al.* (1999) סיכמו את דרך פעולת ה DEM עבור תווך גרגרי יבש והוסיפו גם דרכי טיפול למצב של חלקיקים מודבקים וחלקיקים בתווך רווי.

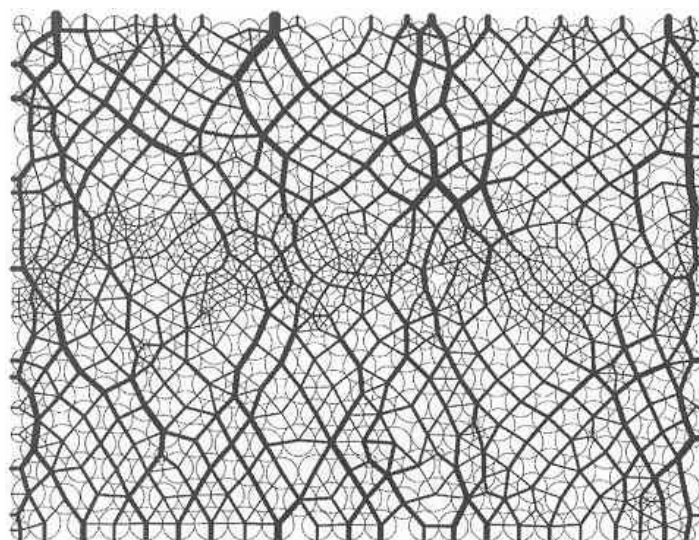
לסיכום, נראה כי ה DEM היא שיטה פשוטה גמישה ויעילה לתיאור התקדמות גלים בתווך גרגרי רב-חלקיקים. חשוב לזכור כי אין בשיטה כפי שהוצגה שימוש במנגנונים הפיזיקליים המדויקים וכל הדמיה מחייבת כיוול של הקבועים בקשר המגע. מבחינת התוצאות נדגיש כי הפרמטר המתקבל מהחישוב הוא רק הכוח במגע ומכאן קיים חסרון יחסי באי היכולת לקבל את דפורמצית החלקיקים ומשם גם את שדה המאמצים ואת התקדמות הגלים בתוך החלקיקים.

המודל השני עליו נדבר הוא ה Material Point Method (MPM) שהוא גרסה של קוד הידרודינמי משיטת ה particle in cell בשם FLIP. מספר חוקרים השתמשו ב MPM לאחר שהותאמה לעבודה בתחום מכניקת המוצק על ידי (Sulsky *et al.* (1995).

(Bardenhagen *et al.* (2001) מסר תיאור קצר של המודל לפני שהוא בחן אותו עבור מיקרים שונים. ה MPM משלב בתוכו את החוזק שבתיאור לגרנז'י ואילרי של החומר. התיאור לגרנז'י בא לידי ביטוי בהבדדה (discretization) של הגוף לאוסף של נקודות חומר (material points). נקודות החומר נושאות את המידע במשך כל הליך החישוב. מידע זה כולל את תכונות החומר ואת המשתנים השונים כגון המהירות המיקום ועוד. התיאור האילרי בא לידי ביטוי ברשת חישוב הקיימת ברקע של נקודות החומר. בזמן מחזור חישוב התכונות השונות עוברות באמצעות אינטרפולציה מנקודות החומר שבכל אלמנט ברשת לצמתים של אותו אלמנט. משוואות השימור מחושבות בצמתים במסגרת לגרנז'ית והשינוי בערכים מעודכן חזרה באמצעות אינטרפולציה לנקודות החומר. הסעת המידע בנקודות החומר אינה כרוכה בשגיאה ובנוסף היא מאפשרת עידכון חופשי של רשת החישוב במידת הצורך. המודל הבסיסי אינו מאפשר חדירה בין הגופים וגם אלגוריתם המגע שהתווסף בכדי לאפשר טיפול במקרה של קשרי מגע בין גופים, הינו פשוט בהשוואה לאלגוריתמים דומים בקודים לגרנז'יים ואילריים טהורים. אלגוריתם זה מאפשר מצבים של הפרדה, החלקה עם חיכוך ואף גלגול בין הגופים. כמו ב- DEM הוספת קשר מגע משיקי (Coulomb friction contact condition) שיפרה את המודל. הליך זה מונע צורך בצעד נפרד לזיהוי מגע בין הגופים, מאפשר פתרון תוך מעבר אחד על רשת החישוב ומביא את המודל ליחס ליניארי בין עלות החישוב למספר הגופים בהדמיה. המודל מסוגל לקבל התנהגות של חומרים שונים כגון ויסקו-אלסטית, פלסטית ועוד. המודל נוסה בהצלחה בבעיות אימפקט, חדירה בין גופים, תהליכי יצור שונים ועוד. בעבודה זו בדקו החוקרים את המודל עבור מספר מיקרים וביניהם גם שני מיקרים של

התקדמות גלים, האחד בשרשרת יחידה ישרה של חלקיקים והשני בשרשרת יחידה בסידור זיג-זג. השוואה נעשתה לניסויים שבוצעו בשיטה הפוטואלסטית על בסיס השוואת הפסים האיזוכרומטיים ומכאן שזו השוואה איכותית בלבד. עבור שני המקרים ניכר כי התקדמות הגלים בסימולציה היתה מהירה מבניסוי וכן כי היתה חשיבות רבה לתנאי המגע ובמיוחד למגע המשיקי. הכותבים גם הוסיפו כי יתכן שההבדלים בין התוצאות נבעו ממרווחים לא סגורים בין החלקיקים בניסוי וכן ממדידה לא מדויקת של תכונות והתנהגות החומר.

ניתן להבחין כי שני המודלים שהוצגו אינם מבוססים על רשת חישוב כמו זו המוכרת משיטת ה-FEM. ה-FEM המשתמשת ברשת לגראנז'ית נפוצה פחות בעת מידול תווך גרגרי וניסיונות לבצע מידול באמצעות ה-FEM עושים בדרך כלל שימוש באלמנטי קורה (beam element). הסיבה גם כאן היא שאין צורך בתיאור מדויק של דפורמצית הגופים בכדי לתאר את מעבר הכוחות המבנה. (Radeke et al. (2002) הדגימו ניסיון כזה. המודל המתואר ברקע של איור 23 נבנה כך שאלמנט אחד הונח בין מרכז גוף אחד לנקודת המגע ואלמנט שני הונח בין נקודת המגע למרכז הגוף השני. התווך הגרגרי יראה במצב זה כרשת מסועפת המורכבת מאלמנטים כאשר צומת שבה מפגש של יותר משני אלמנטים מציינת מרכז גוף. כמו ב-DEM גם כאן ניתן לקבל את התזוזות בצמתים ואת הכוח הנורמלי בנקודות המגע. בחזית של איור 23 ניתן לראות את תוצאות החישוב אחרי ההעמסה כאשר הענפים המודגשים יותר מציינים מגעים דרכם מועבר עומס רב יותר. ניסיון דומה ניתן לראות גם אצל Sadd et al. (1992) שציינו אי-התאמה של 10-20% לתוצאות ניסיוניות. בנוסף ציינו הכותבים כי ה-FEM יעילה יותר מה-DEM בניצול משאבי מחשב אולם בניגוד ל-DEM מאפשרת רק תזוזות קטנות.



איור 23 מודל נומרי (FEM עם אלמנטי קורה) של תווך גרגרי דו-ממדי בסידור אקראי עם דיסקות בקטרים שונים. בעת הפתרון מציינים הענפים העבים שרשראות בהן מועבר עומס רב יותר [Radeke et al. (2002)].

סקירה קצרה על שיטות נומריות לסימולציות של תווך גרגרי בתחום הגיאולוגיה ניתן למצוא אצל (Moresi *et al.* (2001).

לסיכום ניתן לראות כי השיטות הנומריות המתעלמות מן המעוותים בתוך החלקיקים מקובלות יותר בעת הדמית תווך גרגרי. בנוסף נראה שישנו גם יתרון בשימוש בשיטות ללא רשת חישוב. השיטות הנומריות מגיעות היום לשגיאות של 5-15% בחיזוי כוחות המגע בין החלקיקים במבנים מסודרים ועוזרות גם בהבנת התופעות הפיזיקליות המלוות את התקדמות הגלים. שיטות אלה לא תמיד משתמשות במנגנונים הפיזיקליים בצורה מפורשת במודל ולכן יש לשים לב להתאמתם לתוצאות ניסוייות על פי מספר מאפיינים רב ככל האפשר. חשוב לציין כי מרב העבודה מתמקדת בניסיון לדייק בקביעת קשר המגע בין החלקיקים. אין מידע רב על שיטות נומריות הבודקות את מעבר הגלים בתוך החלקיק וגם לא על שימוש בתוכנות מיסחריות.

נסיים במילים אלו על טבעו הנסתר והמסקרן של התווך הגרגרי.

*Who could ever calculate the path of a molecule? How do we know that the creations of worlds are not determined by falling grains of sand?"*

Victor Hugo, *Les Misérables*

### 1.3 מטרות העבודה

מסקירת הספרות שבוצעה הסקנו שיהיה זה נכון להתחיל את לימוד הנושא של מעבר הגלים בתווך גרגרי מחקירה של שרשרת ישרה יחידה, היות וזהו המבנה הבסיסי ביותר המשמש לתיאור תווך זה. בחרנו לבחון נומרית מגוון של מצבים שנבחנו בחלקם גם בספרות בכדי להבין את יכולתו של קוד מסחרי זמין למדל אותם ובכדי לרכוש הבנה נרחבת לגבי תכונות התווך הגרגרי ואופן העברת העומס דרכו. מבחינה ניסויית השיטה הפוטואלסטית מוכחת בספרות ככלי יעיל מאד לקבלת תוצאות על התקדמות העומס במבנים גרגריים ולכן החלטנו להשתמש בה.

מטרות העבודה ניתנות לסיכום בצורה הבאה:

- הקמת מערכת ניסוי פוטואלסטית דינמית על בסיס נקבת הלים אנכית הקיימת במעבדה.
  - בנית מודל נומרי באמצעות הקוד המסחרי ABAQUS ובחינת התקדמות הגלים בשרשרת אנכית ישרה בת 11 דיסקות. חקירה זו תכלול גם בדיקה של התנהגות הגלים לאחר החזרה מקצוות השרשרת.
  - בחינת המודל הנומרי על ידי השוואה בין תחזיות החקירה הנומרית לתוצאות חקירה ניסויית שנערכה במקביל במעבדה.
  - חקירה נומרית וניסויית של השפעת עומס סטטי מוקדם על התקדמות הגלים בשרשרת דיסקות אנכית ישרה. הדגש בחקירה זו יהיה על השפעת העומס המוקדם על מהירות התקדמות האות בשרשרת.
  - חקירה נומרית הבודקת את השפעתם של מאפיינים שונים על התקדמות האותות בשרשרת:
    - השפעת קוטר הדיסקות.
    - השפעת צפיפות החומר ממנו עשויות הדיסקות.
    - השפעת אורך אות ההעמסה על צורת הגלים המתקדמים בשרשרת.
- בעת חקירת האותות, יבחנו בין השאר המאפיינים הבאים: השינוי הכללי בצורת האות, מהירותו, אורכו, הפיזור שהוא עובר והשינוי באמפליטודה במהלך ההתקדמות.

## 2 רקע תיאורטי

פרק זה מפרט מספר נושאים בעלי חשיבות להבנת המחקר של התווך הגרגרי וכן להבנת מערכת הניסוי בה נעשה שימוש בעבודה זו.

### 2.1 מנגנון העברת העומס בין חלקיקים בתווך גרגרי - מנגנון המגע

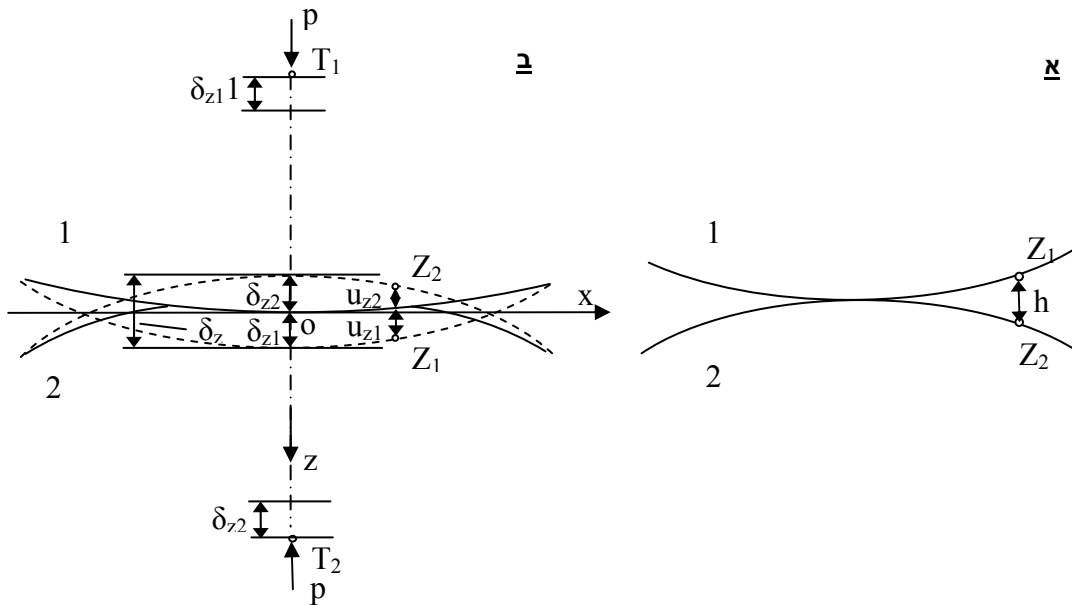
מתוך סקר הספרות ניתן להבין כי המנגנון השולט בהעברת הכוח בין החלקיקים בתווך הגרגרי הוא מנגנון המגע. בשנת 1880 ביצע Hertz חקירה אופטית במערכת שבה היו עדשות נתונות במגע אחת עם השנייה. דאגתו התעוררה לגבי העובדה שהדפורמציה האלסטית הנוצרת עקב כוחות המגע בין העדשות עלולה הייתה להשפיע על תוצאות מחקרו. בשנת 1882 פרסם Hertz את האנליזה הראשונה של מאמצים אלסטיים הנוצרים במגע בין שני גופים אלסטיים (Hertz theory of elastic contact) תחת העמסה סטטית וקואזי-סטטית. תיאוריה זו מתארת בהצלחה מיקרים רבים של מגע בין גופים ועומדת במבחן הזמן עד ימינו אנו.

Johnson (1985) תיאר בספרו את תיאורית המגע של Hertz וכן פיתוחים נוספים שנעשו במשך השנים בכדי לאפשר התאמה טובה יותר של התיאוריה לתיאור בעיות מגע במקרים שונים. הסקירה הבאה תתייחס לכללים שבבסיס תיאורית המגע של Hertz ותתמקד במקרה של מגע בין שני גופים גליליים שציריהם מקבילים. כאשר שני גופים שאינם תואמים במשטחיהם החיצוניים (non-conforming surfaces) מובאים לידי נגיעה הם נוגעים בתחילה בנקודה אחת או לאורך קו. כאשר מופעל עומס כלשהו מתפתחת דפורמציה באזור הנגיעה הראשונה ונוצר שטח מגע סופי בגודלו בין הגופים. שטח זה קטן בהשוואה לממדי הגופים. תיאורית המגע באה לתאר את צורת שטח המגע ואת השינוי בו עם השינוי בעומס המופעל. כמו כן מתוארים גודל ופילוג העומס הנורמלי והמשיקי המועברים דרך משטח המגע וכן המעוותים, המאמצים והתזוזות בקרבת אזור המגע.

בשלב הראשון היה צורך לתאר את צורת המשטח של הגופים הבאים במגע. תיאור זה כלל בתוכו את ההנחה כי המשטחים חלקים. מתוך התיאור נובע בין השאר כי משטח המגע במקרה של גופים בעלי פרופיל כללי יהיה בעל צורה אליפטית.

איור 24 (א) מתאר חתך של שני גופים 1 ו 2 הנוגעים אחד בשני.  $Z_1$  ו  $Z_2$  הן שתי נקודות הנמצאות על משטחי הגופים 1 ו 2, בהתאמה. המרחק בין הנקודות  $h$  ניתן לתיאור באמצעות הפונקציה המתארת את משטחי הגופים. כאשר מופעל כוח נורמלי ליחידת אורך  $p$  במקביל

לציר  $z$  הגופים עוברים דפורמציה כמוראה באיור 24 (ב). בזמן הלחיצה נקודות בשני הגופים הרחוקות מאזור המגע כמו  $T_1$  ו  $T_2$  נעות לעבר הנקודה  $o$  במקביל לציר  $z$  בהזזה של  $\delta_{z1}$  ו  $\delta_{z2}$ , בהתאמה.



איור 24 חתך של שני גופים (א) בנגיעה ללא הפעלת כוח (ב) אחרי הפעלת כוח.

אם הגופים לא היו מתעוותים הם היו חופפים אחד את השני כמוראה על ידי הקוים המקווקוים. עקב לחץ המגע על משטח המגע מתעוות כל גוף כלפי פנים במקביל לציר  $z$  בשיעור של  $u_{z1}$  ו  $u_{z2}$ . אם מוגדר כי  $\delta_z = \delta_{z1} + \delta_{z2}$  ניתן להבחין בשני מצבים.

כאשר  $Z_1$  ו  $Z_2$  מצויות בתוך אזור המגע ניתן לרשום:

$$u_{z1} + u_{z2} = \delta_z - h \quad (2.1.1)$$

כאשר  $Z_1$  ו  $Z_2$  מצויות מחוץ לאזור המגע ניתן לרשום:

$$u_{z1} + u_{z2} < \delta_z - h \quad (2.1.2)$$

אלו הם שני התנאים שכל שדה הזזות צריך לקיים בכדי שיתאים לפתרון בעית המגע.

Hertz גם הוסיף מספר תנאים עליהם מבוססים הפתרון והתיאוריה כולה:

- משטחי הגופים רציפים ואינם תואמים האחד את השני.
- המעוותים הנוצרים באזור המגע קטנים
- לכל גוף ניתן להתייחס כגוף חצי אינסופי
- המשטחים חסרי חיכוך



### 2.1.1 פתרון עבור גופים גליליים אינסופיים

עבור גופים גליליים אינסופיים בעלי רדיוס  $R_1$  ו  $R_2$  הבאים לידי מגע במקביל לצירים שלהם מתחיל שטח המגע כקו מגע והופך לפס אינסופי ברוחב  $2b$ .

נגדיר מספר פרמטרים בסיסיים:

$p$  הוא הכוח הנורמלי ליחידת אורך,

$R$  הוא רדיוס העקמומיות היחסי של הגופים המצויים במגע ומוגדר כ:

$$R = \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^{-1} \quad (2.1.3)$$

$E^*$  הוא פרמטר המתאר את קשיחות המגע והוא תלוי בתכונות המכניות של הגופים:

$$E^* = \left( \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right)^{-1} \quad (2.1.4)$$

כאשר  $E$  ו  $\nu$  הם מודול האלסטיות ויחס פואסון, בהתאמה.

מתקבל כי גודל הכוח ליחידת אורך בחתך שטח המגע הוא:

$$p = \frac{\pi b^2 E^*}{4R} \quad (2.1.5)$$

או שחצי רוחב שטח המגע שהוא גם הגודל האופייני יהיה:

$$b = \left( \frac{4pR}{\pi E^*} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.1.6)$$

בדרך כלל נוכל למדוד את הכוח ולמצוא את  $b$  בעזרת (2.1.6).

מתקבל כי פילוג הלחץ לרוחב שטח המגע על פי Hertz הוא:

$$P(x) = \frac{2p}{\pi b^2} (b^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} \quad x \leq b \quad (2.1.7)$$

מבטיי זה ניתן לראות כי במרכז אזור המגע ( $x=0$ ) הלחץ הוא מרבי ומגיע לערך של:

$$P_0 = \frac{2p}{\pi b} = \left( \frac{pE^*}{\pi R} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{4}{\pi} P_m \quad (2.1.8)$$

כלומר הלחץ המרבי גבוה פי בערך 1.3 מהלחץ הממוצע לרוחב שטח המגע ( $P_m$ ). בקצה אזור המגע ( $x=b$ ) מתקבל כי הלחץ הוא 0. ניתן גם לראות ממשוואה (2.1.7) כי פילוג הלחץ במגע הוא אליפטי.

Hertz גם הראה מהם המאמצים על שפת הגוף בתוך אזור המגע ומחוצה לו וכן את המאמצים לאורך ציר  $z$  במרכז שטח המגע. חשוב לציין כי המאמצים לפי תיאורית Hertz גבוהים בגלל ריכוז הכוח הלוחץ על שטח קטן, אך הם דועכים בצורה מהירה כאשר מתרחקים מאזור המגע ובמרחק של 5-10 חצאי רוחב מגע הגוף בדרך כלל כבר אינו מרגיש

את הלחיצה. מרחק זה מדגיש את אופייה המקומי של בעיית המגע וכן הוא מהווה תנאי לממדי הגוף בכדי שנוכל להגדיר אותו כחצי אינסופי. פרט חשוב נוסף הוא הקשר בין הכוח הכללי במגע להתקרבות היחסית של הגופים ( $\delta_z$ ) במקביל לציר  $z$ . זהו למעשה חוק המגע בין הגופים. עבור גופים גליליים לא פותח קשר מסוג זה ועבור שני גופים כדוריים הוא נתון בצורה הבאה:

$$P = \frac{4}{3} R^{\frac{1}{2}} E^* \delta_z^{\frac{3}{2}} \quad (2.1.9)$$

ניתן לראות כי Hertz חזה שקיים קשר לא ליניארי בין הכוח לתזוזה.

### 2.1.2 פתרון לבעיית מגע הכולל אינטראקציה משיקית

מאז מחקריו של Hertz ועד ימינו מנסים חוקרים רבים להוסיף נדבכים נוספים לתיאורית המגע כך שניתן יהיה לטפל במקרים רבים יותר. בין המצבים שלא טופלו בתיאוריה הבסיסית של Hertz וטופלו לאחר מכן היה מצב שבו גם כוח משיקי פועל על אזור המגע כלומר יש חיכוך בין הגופים. מבין הפתרונות השונים למצב זה נתייחס לפתרון שפותח על ידי Smith & Liu (1953). Shukla & Nigam (1985) עשו שימוש בפתרון זה עבור מגע בין שתי דיסקות.

המאמצים בכל נקודה בגוף באזור המגע מוצגים בצורה הבאה:

$$(2.1.10)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} &= -\frac{b}{\pi\Delta} \left\{ z(b\phi_1 - x\phi_2) + \beta z^2 \phi_2 \right\} \\ \sigma_{xx} &= -\frac{b}{\pi\Delta} \left[ z \left( \frac{b^2 + 2z^2 + 2x^2}{b} \phi_1 - \frac{2\pi}{b} - 3x\phi_2 \right) + \beta \left\{ (2x^2 - 2b^2 - 3z^2) \phi_2 + \frac{2\pi x}{b} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2(b^2 - x^2 - z^2) \frac{x}{b} \phi_1 \right\} \right] \\ \sigma_{xz} &= -\frac{b}{\pi\Delta} \left[ z^2 \phi_2 + \beta \left\{ (b^2 + 2x^2 + 2z^2) \frac{z}{b} \phi_1 - 2\pi \frac{z}{b} - 3xz\phi_2 \right\} \right] \end{aligned}$$

כאשר הנעלמים במשוואות אלה הם  $b$  - חצי רוחב שטח המגע ו  $\beta$  - מקדם החיכוך בין המשטחים.

שאר האיברים הם:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{\pi(M+N)}{MN\sqrt{2MN+2x^2+2z^2-2b^2}} \\ \phi_2 &= \frac{\pi(M-N)}{MN\sqrt{2MN+2x^2+2z^2-2b^2}} \\ M &= \sqrt{\{(b+x)^2+z^2\}} \\ N &= \sqrt{\{(b-x)^2+z^2\}} \end{aligned}$$

$$\Delta = \frac{1}{A+B} \left( \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right)$$

$$A = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1'} + \frac{1}{R_2'} \right) + \frac{1}{4} \sqrt{\left[ \left\{ \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_1'} \right) + \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_2'} \right) \right\}^2 - 4 \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_1'} \right) \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_2'} \right) \sin^2 \alpha \right]}$$

$$B = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1'} + \frac{1}{R_2'} \right) - \frac{1}{4} \sqrt{\left[ \left\{ \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_1'} \right) + \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_2'} \right) \right\}^2 - 4 \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_1'} \right) \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_2'} \right) \sin^2 \alpha \right]}$$

כאשר  $\alpha$ , הזווית בין המישורים שיוצרים שני רדיוסי העקמומיות הראשיים ( $R$  ו  $R'$ ) באזור המגע, שווה ל-  $90^\circ$  במקרה של מגע בין שתי דיסקות.

כאמור משוואות אלו מתארות את שדה המאמצים רק באזור המגע כלומר, ברדיוס שלא עולה על עשרה רדיוסים של שטח המגע (10b). לאחר שנמצאו הנעלמים ניתן לחשב גם את הכוח במשטח המגע (P) מהקשר הבא.

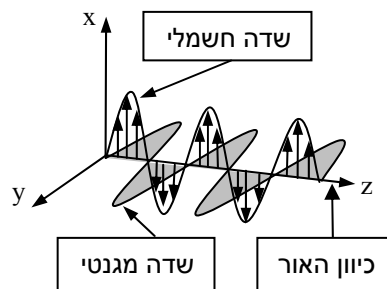
$$P = \frac{\pi h b^2}{2\Delta} \quad (2.1.11)$$

## 2.2 אור, מכשור אופטי והתיאוריה הפוטו-אלסטית

סקירה זו נלקחה מתוך (Dally & Rilay (1978).

### 2.2.1 מונחים בסיסיים בתיאור האור

Maxwell תיאר בעבודתו קרינה אלקטרומגנטית המתקדמת כגל בעל מהירות גבוהה מאד. כיוון ההתקדמות ניצב לכיווניהם של הוקטורים המתארים את השדה החשמלי והשדה המגנטי הניצבים גם הם האחד לשני (איור 25).



איור 25 וקטורים בשדה חשמלי ושדה מגנטי המגדירים את הגל האלקטרומגנטי.

שני פרמטרים משמשים לאיפיון גלים. האחד הוא אורך הגל  $\lambda$  והשני הוא התדירות  $f$

המוגדרת כמספר המחזורים לשנייה

$$f = \frac{1}{T} \quad (2.2.1)$$

כאשר  $T$  הוא זמן המחזור. פרמטרים אלה ניתן גם לקשור למהירות הגל  $c$  בצורה הבאה

$$T = \frac{\lambda}{c} = \frac{1}{f} \quad (2.2.2)$$

נשתמש בתיאור הוקטור החשמלי לתיאור עצמת האור כגל מחזורי פשוט הנע בכיוון החיובי של ציר  $z$  מתוך שימוש בפתרון משוואת הגלים החד-ממדית

$$E = f(z - ct) = a \cos \frac{2\pi}{\lambda} (z - ct) \quad (2.2.3)$$

כאשר  $E$  הוא עצמת וקטור האור,  $z$  היא הקואורדינטה לאורך ציר ההתקדמות,  $t$  הוא הזמן ו  $a$  אמפליטודת הגל.

על ידי שימוש בקשר הנתון ב (2.2.2) ומתוך הגדרת התדירות הזוויתית  $\omega$  ומספר הגל  $k$

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \\ k &= \frac{2\pi}{\lambda} \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

ניתן לרשום את הביטוי לאור בצורתו הגלית כתלות בפאזה ההתחלתית והיחסית.

$$E = a \cos(kz - \omega t) \quad (2.2.5)$$

## 2.2.2 שבירה ועיכוב (refraction and retardation)

האור הנע בחלל החופשי (ריק) במהירות  $c$  ינוע בכל תווך פיזיקלי אחר במהירות  $v$  הנמוכה מ  $c$ . היחס בין מהירות האור בריק למהירותו בתווך כלשהו יסומן באות  $n$ . זוהי תכונה של התווך הנקראת אינדקס השבירה (index of refraction). מאחר ותדירות הגל לא תלויה בתווך בו הוא מתקדם, אורך הגל ישתנה בהתאם לשינוי במהירות הגל בתווך. כך שגל הנע בתווך כלשהו יפתח הזזה לינארית בפאזה ביחס לגל מקביל הנע בחלל החופשי. גודל ההזזה ניתן להבעה באמצעות אינדקס השבירה של התווך. הזמן הנדרש למעבר האור בתווך בעובי  $h$  יהיה:

$$t = \frac{h}{v} \quad (2.2.6)$$

באותו זמן האור המתקדם בחלל החופשי יעבור מרחק  $s$

$$s = ct = c \frac{h}{v} \quad (2.2.7)$$

ההפרש בין שתי הדרכים ייתן את הפרש הפאזה הליניארי (linear phase difference)  $\delta$ -

$$\delta = s - h = \frac{ch}{v} - h = h(n - 1) \quad (2.2.8)$$

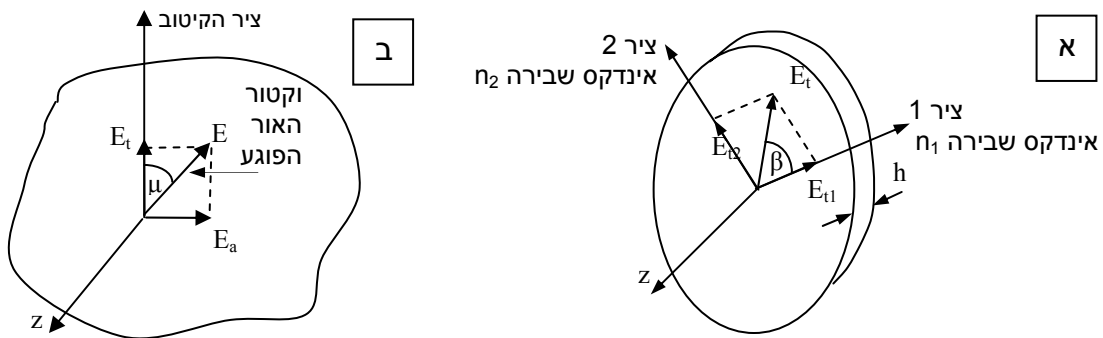
זהו גם העיכוב המוחלט הנוצר בין שני רכיבי אור שאחד מהם נע בחלל החופשי והשני בתווך כלשהו. ניתן לראות כי לפי הגדרת אינדקס השבירה מתקבל כי העיכוב הוא תמיד ערך חיובי.

### 2.2.3 חומרים בעלי אינדקס שבירה כפול (birefringent or doubly refracting materials)

חומרים בעלי אינדקס שבירה כפול הם אלמנטים אופטיים בהם האור בכל נקודה בגוף מתפרק לשני רכיבים לאורך שני צירים הניצבים זה לזה. בכל ציר אינדקס השבירה שונה ולכן יכול האור להתקדם במהירות שונה בכל רכיב.

#### 2.2.3.1 פלטת גל (wave plate)

פלטת גל היא רכיב אופטי בעל תכונה של אינדקס שבירה כפול הומוגני, כלומר בכל נקודה בגוף החלוקה לרכיבים והעיכוב המתקבל קבועים. לפלטת הגל המתוארת איור 26 (א) שני צירים ראשיים 1 ו 2 כאשר האור נע בציר 1 במהירות  $c_1$  שהיא גדולה ממהירות האור  $c_2$  בציר 2. מכאן שציר 1 יהיה הציר המהיר וציר 2 יהיה הציר האיטי.



איור 26 (א) התפצלות האור בפלטת גל (ב) התפצלות האור במקטב מישורי

כאשר אלומת אור מקוטבת מישורית  $E_t$  (ראה סעיף 2.2.4) פוגעת בפלטת הגל בזווית  $\beta$  לציר 1 האור מתפרק לשני רכיבים הנעים בצירים הראשיים של פלטת הגל ואותם נכנה  $E_{t1}$  ו  $E_{t2}$ , בהתאמה. מאחר והתנועה לאורך כל ציר מתבצעת במהירות שונה הרי לכל רכיב אינדקס שבירה שונה ולכן גם הזזת הפאזה הליניארית תהיה שונה

$$\begin{aligned} \delta_1 &= h(n_1 - 1) \\ \delta_2 &= h(n_2 - 1) \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

וההזזה הליניארית היחסית תהיה:

$$\delta = \delta_2 - \delta_1 = h(n_2 - n_1) \quad (2.2.10)$$

מכאן ניתן להביע גם את ההזזה הזוויתית היחסית (או העיכוב הזוויתי היחסי) בעזרת הקשר

$$\Delta = \frac{2\pi}{\lambda} \delta = \frac{2\pi h}{\lambda} (n_2 - n_1) \quad (2.2.11)$$

ניתן לראות כי ההזזה הזוויתית היחסית תלויה בעובי הדגם, באורך גל האור ובתכונות פלטת הגל.

כאשר פלטת הגל מתוכננת לתת הזזה זוויתית של  $\Delta = \pi/2$  הפלטה נקראת פלטת רבע גל (quarter wave plate). כאשר פלטת רבע גל מקבלת את אלומת האור המקוטב מישורית בזווית של  $\beta = \pi/4$  האור הנפלט יהיה מקוטב מעגלי (ראה סעיף 2.2.4). ניתן לתאר את רכיבי האור אחרי פלטת הגל בצורה הבאה:

$$\begin{aligned} E'_{i1} &= E_i \cos \beta \cos \omega t \\ E'_{i2} &= E_i \sin \beta \cos(\omega t - \Delta) \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

בצורה זו בא בחשבון רק הפרש הפאזה הזוויתית היחסי בין הרכיבים כי הפרש הפאזה המוחלט של כל רכיב אינו משפיע על תיאור הבעיה.

#### 2.2.4 אור מקוטב (polarized light)

במרבית המקרים אלומת אור הנפלטת ממקור כלשהו מורכבת מקרניים ללא אוריינטציה מועדפת כלומר השדה החשמלי של כל קרן אור פונה לכיוון כלשהו. כאשר אלומת אור מתקדמת ולכל הקרניים המרכיבות אותה שדה חשמלי באותו כיוון האור נקרא אור מקוטב מישורית או אור מקוטב ליניארית (linearly polarized or plane polarized). רכיב אופטי הגורם לקיטוב מישורי של אלומות אור נקרא מקטב מישורי או ליניארי (linear or plane polarizer). מאחר ואין משמעות לפאזה ההתחלתית של הגלים ניתן לתאר את גודל הוקטור בצורה הבאה

$$E = a \cos \omega t \quad (2.2.13)$$

אור הפוגע במקטב המישורי בזווית כלשהי  $\mu$  לציר הקיטוב כמוראה באיור 26 (ב) מתפרק לשני רכיבים כאשר האור ברכיב המקביל לציר הקיטוב מועבר והאור ברכיב הניצב לציר הקיטוב נבלע או מוחזר. הרכיבים מתוארים בצורה הבאה כאשר האינדקס  $t$  מציין את האור המועבר (transmitted) דרך המקטב והאינדקס  $a$  את האור שנבלע (absorbed).

$$\begin{aligned} E_a &= a \cos \omega t \sin \mu \\ E_t &= a \cos \omega t \cos \mu \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

צורה נוספת של אור מקוטב היא אור מקוטב מעגלי (circular polarized light). צורה זו נוצרת לאחר שאור מקוטב מישורית פוגע בפלטת רבע גל בזווית של  $\beta = \pi/4$  ביחס לציר המהיר. במצב זה האור מתקדם בשני מישורים ניצבים בגודל שווה אך בהפרש פאזה זוויתית יחסי של  $\Delta = \pi/2$ . במבט מכיוון ההתקדמות על קצוות הוקטורים המסמנים את שיאי הגלים ניתן לצייר קו לוליני מעגלי (מישור הניצב לכיוון ההתקדמות) ומכאן נובע שמה של צורת קיטוב זו.

### 2.2.5 התיאוריה הפוטואלסטית

חומרים רבים המתנהגים בצורה אופטית איזוטרופית ללא מאמץ הופכים לבעלי התנהגות אנאיזוטרופית ומציגים תכונה של אינדקס שבירה כפול תחת עומס. תכונה זו הנקראת אינדקס שבירה כפול זמני (temporary doubly refracting materials) התגלתה לראשונה על ידי Brewstir ב-1816. אנו נכנה את החומרים המציגים תכונה זו חומרים פוטואלסטיים. Maxwell מצא בעבודתו כי חומרים אלסטיים ליניאריים בעלי תכונה של אינדקס שבירה כפול זמני פרופורציונאליים ליניארית בתגובתם לעומס המופעל על הגוף ולמאמצים המתפתחים בו. הקשר שפיתח Maxwell בין המאמצים להפרש שבין אינדקסי השבירה לאורך הצירים הראשיים בזמן העמסת הגוף ואינדקס השבירה בגוף לא מועמס, ידוע כחוק הפוטואלסטי. מכאן שהתיאוריה הפוטואלסטית קושרת בין מצב המאמצים בגוף לא מועמס לבין השיטה האופטית שמאפשרת מבט על מאמצים אלה. היתרון הגדול בשיטה ניסויית זו הוא האפשרות לקבל תמונה מלאה של כל שדה המאמצים בגוף בכל רגע (עבור גוף דו-ממדי) וכן היכולת לעקוב אחרי אזורים בהם ישנם גרדיאנטים גדולים של מאמצים. בשונה מהקשר שפיתח Maxwell מעדיפים היום להשתמש בהפרש היחסי בין אינדקסי השבירה בצירים הראשיים ולא בהפרש ביחס לאינדקס השבירה בגוף לא מועמס

$$\begin{aligned} n_2 - n_1 &= c_{rpe} (\sigma_1 - \sigma_2) \\ n_3 - n_2 &= c_{rpe} (\sigma_2 - \sigma_3) \\ n_1 - n_3 &= c_{rpe} (\sigma_3 - \sigma_1) \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

כאשר  $n_1, n_2, n_3$  הם אינדקסי השבירה בכיוון הצירים הראשיים (אינדקסי שבירה ראשיים) בנקודה כלשהי בגוף,  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  הם המאמצים הראשיים באותה נקודה ו  $c_{rpe}$  הוא קבוע המכונה המקדם הפוטואלסטי היחסי.

היות וחומר בעל אינדקס שבירה כפול זמני מתנהג כמו פלטת גל כאשר הוא תחת עומס ניתן להשתמש במשוואה (2.2.11) שהתקבלה עבור העיכוב הזוויתי היחסי. חשוב לשים לב שבמקרה זה בניגוד לקורה בפלטת הגל מדובר על עיכוב זוויתי יחסי שונה בכל נקודה בחומר.

במקרה שלנו מדובר על דגם של דסקה, כלומר דגם דו-ממדי שבו ניתן להניח מצב של מאמץ מישורי. מכאן ניתן לרשום בעזרת משוואה (2.2.15) את הפרש הפאזה הזוויתי היחסי במקרה הדו-ממדי

$$\Delta_{12} = \frac{2\pi h}{\lambda} (n_2 - n_1) = \frac{2\pi h c_{rpe}}{\lambda} (\sigma_1 - \sigma_2) = \Delta \quad (2.2.16)$$

ברור כי  $\sigma_1, \sigma_2$  הם המאמצים הראשיים במישור וכן  $\sigma_1 > \sigma_2$  אך לא בהכרח גדול מ  $\sigma_3$ . תוך שימוש בהגדרת מספר הפס הפוטואלסטי (ראה סעיף 2.2.7) או העיכוב הזוויתי היחסי במונחים של עיכוב מחזור שלם

$$N = \frac{\Delta}{2\pi} \quad (2.2.17)$$

הגדרת המקדם הפוטואלסטי של החומר (material fringe value)

$$f_{\sigma} = \frac{\lambda}{c_{rpe}} \left[ \frac{N}{m \cdot fringe} \right] \quad (2.2.18)$$

והגדרת מאמץ הגזירה המירבי במצב מאמץ מישורי

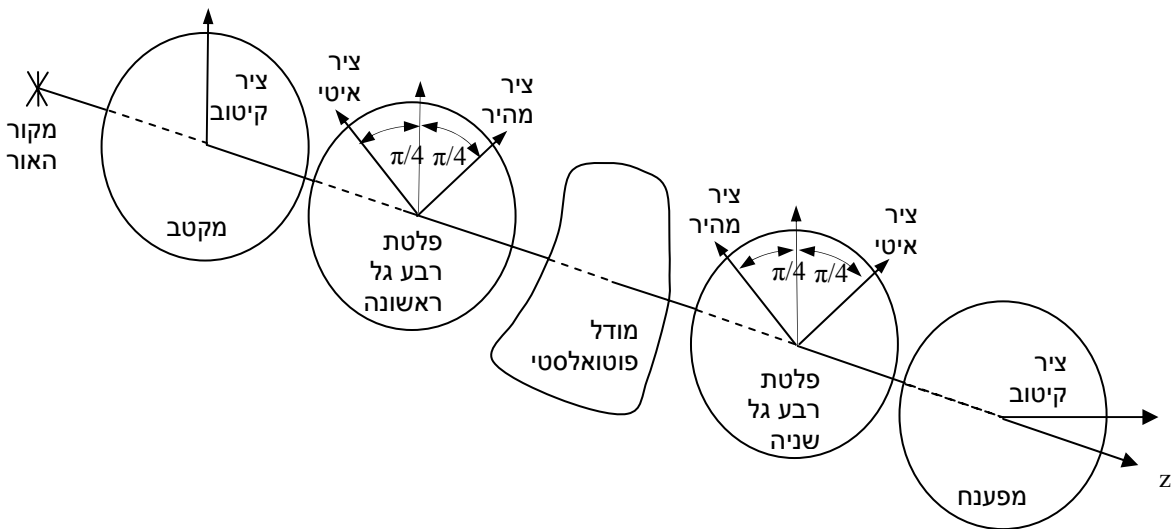
$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad (2.2.19)$$

ניתן לרשום את החוק הפוטואלסטי בצורה נוחה יותר

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{Nf_{\sigma}}{2h} \quad (2.2.20)$$

## 2.2.6 הפולריסקופ

הפולריסקופ הוא מכשיר אופטי המשתמש בתכונות של האור המקוטב לחקירה ניסויית של שדה המאמצים בגופים שונים העשויים מחומרים פוטואלסטיים. ישנם שני סוגי פולריסקופ מקובלים, אשר שמותיהם נגזרים מצורת האור המקוטב המגיעה לדגם. הראשון הוא פולריסקופ מישורי (plane polariscope) והשני הוא פולריסקופ מעגלי (circular polariscope). הניסויים בעבודה הנוכחית התבצע באמצעות פולריסקופ מעגלי ולכן נתמקד בו בסקירה זו. סכימה כללית של פולריסקופ זה נתונה באיור 27.



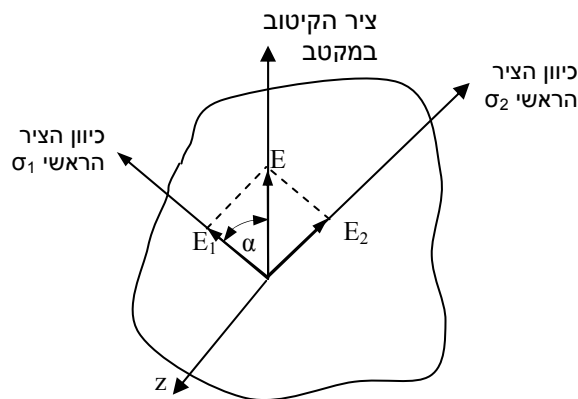
איור 27 פולריסקופ מעגלי

ניתן לראות כי ממקור האור מגיעה אלומת אור אל המקטב המישורי הראשון שיקרא להלן המקטב (polarizer). המקטב מעביר את האור בצורה אנכית בלבד. מכאן ממשיך האור המקוטב בדרכו במקביל לציר z ופוגע בפלטת רבע גל הראשונה בזווית של  $\beta = \pi/4$  ביחס לציר



המהיר. ביציאתו מפלטה זו הופך האור למקוטב מעגלי והוא ממשיך לכיוון הדגם הפוטואלסטי.

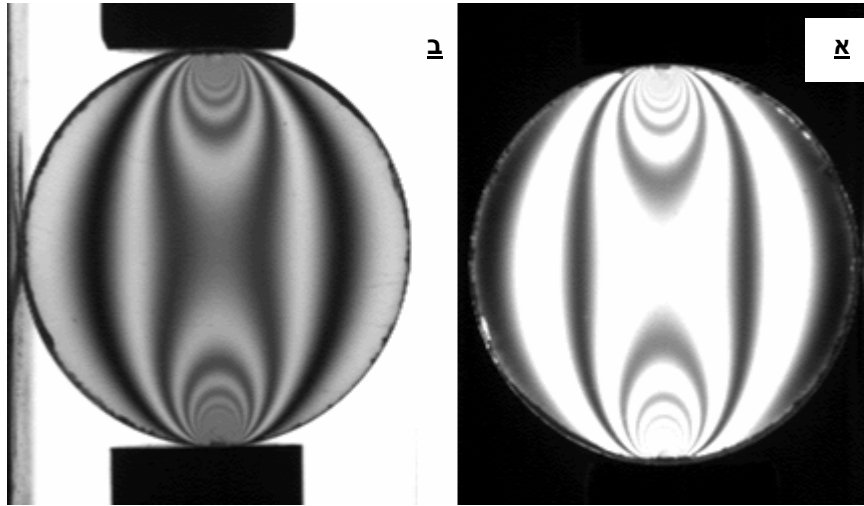
הדגם (איור 28) ניצב כך שנוצרת זווית  $\alpha$  בין ציר הקיטוב האנכי במקטב לציר המאמץ הראשי המירבי  $\sigma_1$  בדגם. בעת פגיעתו בדגם מופרדים רכיבי האור לרכיבים על פי כיווני הצירים הראשיים  $\sigma_1$  ו  $\sigma_2$ . מן הדגם האור ממשיך לפלטת רבע גל השנייה. פלטה זו הפוכה בציריה ביחס לפלטת רבע גל הראשונה. משם ממשיך האור אל המקטב המישורי השני שיקרא להלן המפענח (analyzer). המפענח יכול להעביר את האור בצורה אופקית או אנכית. כאשר המפענח מעביר את האור בצורה אופקית הניצבת לציר הקיטוב של המקטב שדה האור המתקבל הוא שחור (dark field) (איור 29 א)). כאשר המפענח מעביר את האור בצורה אנכית המקבילה לציר הקיטוב של המקטב מתקבל שדה אור לבן (light field) (איור 29 ב)). בשני המקרים דגם פוטואלסטי ללא מאמצים יראה שקוף. ההבדל העיקרי בין פולריסקופ מעגלי לפולריסקופ מישורי הוא שבאחרון אין פלטות רבע גל ולכן האור המגיע לדגם מקוטב מישורית.



איור 28 התפצלות האור בדגם בעל תכונות של אינדקס שבירה כפול

### 2.2.7 פסים איזוכרומטיים (isochromatic fringes) ופסים איזוקליניים (isoclinic fringes).

התמונה המתקבלת אחרי המפענח משתנה בהתאם למקור האור (לבן/מונוכרומטי), סוג הפולריסקופ וסוג השדה (לבן/שחור). בכל מצב מתקבלת תמונה של פסים כאשר עבור אור לבן המורכב מכל אורכי הגל תהיה סדרה של פסים צבעוניים וסדרה של פסים כהים ובהירים בעוד שעבור אור בעל אורך גל יחיד (מונוכרומטי) תהיה סדרה של פסים כהים ובהירים בלבד (איור 29). מכאן שתמיד חלק מהאור מועבר וחלקו נבלע.



איור 29 צילום של דיסקה פוטואלסטית תחת העמסה צירית בעזרת מקור אור מונוכרומטי (א) שדה שחור (ב) שדה לבן

כדי להבין תופעה זו נעזר בביטוי המתאר את האור אחרי המפענח בפולריסקופ מישורי ומתוכו ניתן לחשב את עצמת האור (light intensity) הפרופורציונלית לריבוע האמפליטודה. מתקבל הביטוי הבא שבו  $K$  הוא קבוע

$$I = K \sin^2 2\alpha \sin^2 \frac{\Delta}{2} \quad (2.2.21)$$

כדי לקבל בליעה מוחלטת של אור הביטוי לעצמת האור צריך להתאפס. ביטוי זה מתאפס בשני מקרים כאשר  $\sin^2 2\alpha = 0$  או כאשר  $\sin^2(\Delta/2) = 0$ . מקרים אלה מתארים שני מצבים שונים.

עבור המקרה הראשון ניתן לאפס את הביטוי כאשר  $2\alpha = n\pi$   $n=0,1,2,\dots$  כלומר כאשר אחד הצירים הראשיים מקביל לאחד מצירי המקטב. מכאן שהפס המבוטא באמצעות האיפוס תלוי בנטיית הצירים הראשיים ולכן פסים מסוג זה הם אוסף נקודות שבהן למאמצים הראשיים נטייה אחידה. פסים אלה נקראים פסים איזוקליניים או פסים שווי נטייה (isoclinic fringes) והם מציינים כאמור את נטיית הצירים הראשיים בנקודות השונות בדגם.

במקרה השני האיפוס מתרחש עבור  $\Delta/2 = n\pi$   $n=0,1,2,\dots$  כלומר האיפוס תלוי בהפרש בין הצירים הראשיים המבוטא באמצעות הפרש הפאזה היחסי  $\Delta$ . הפסים המתקבלים במקרה זה מציינים אוסף נקודות שעבורן הפרש המאמצים הראשיים קבוע. ניתן גם לחזור ולהביט במשוואה (2.2.20) ולראות שפסים אלה מציינים גם נקודות בהן מאמץ הגזירה המרבי קבוע. פסים אלה נקראים פסים איזוכרומטיים או פסים שווי צבע (isochromatic fringes).

נציב את תנאי האיפוס השני בחלקה השני של משוואה (2.2.16) ונקבל

$$n = \frac{\Delta}{2\pi} = \frac{hc_{\text{rpe}}}{\lambda} (\sigma_1 - \sigma_2) \quad (2.2.22)$$

ניתן לראות כי סדר האיפוס  $n$  תלוי בהפרש בין המאמצים הראשיים ובאורך הגל. עבור הפרש נתון בין המאמצים הראשיים האפשרות לקבל את  $n$  כמספר שלם (תנאי האיפוס) היא רק עבור  $\lambda$  מסוים כלומר רק במקרים של מקור אור מונוכרומטי. מכאן שכאשר הדגם נצפה באמצעות אור מונוכרומטי הפסים האיזוכרומטיים מופיעים כסדרה של פסים בהירים וכהים כאשר באחרונים עצמת האור היא 0. ההפרש בין כל פס פרופורציוני ליניארי להפרש בין המאמצים הראשיים. מאידך כאשר הדגם נצפה באור לבן נקבל כאמור תחום של אורכי גל ובהתאם גם תחום של ערכים ל  $n$ . מכאן שהפסים בתמונה יהיו צבעוניים ופס שחור המצוין בליעה מלאה יופיע רק כאשר ההפרש בין המאמצים הראשיים הוא באמת 0.

בפולריסקופ מישורי מופיעים הפסים האיזוכרומטיים והאיזוקליניים באותה תמונה ולכן קשה יותר להפריד ביניהם. מכאן נעבור ונבדוק את הקורה בפולריסקופ מעגלי. נביט בביטוי לעצמת האור אחרי המפענח בפולריסקופ מעגלי במצב של שדה שחור.

$$I = K \sin^2 \frac{\Delta}{2} \quad (2.2.23)$$

ניתן לראות שבמקרה זה לא מופיע הביטוי הקשור ב-  $\alpha$  ולכן אין תלות בנטיית הצירים הראשיים. כלומר לא ניתן לראות פסים איזוקליניים בפולריסקופ מעגלי. הפסים האיזוכרומטיים מתנהגים כמו בפולריסקופ המישורי ועלינו רק ללמוד להבדיל בין התמונה המתקבלת בשדה שחור לעומת שדה לבן.

עבור מצב של אור מונוכרומטי נביט במשוואה (2.2.17) ונציב בה את תנאי האיפוס

$$\Delta/2 = n\pi \quad n=0,1,2,\dots \quad (2.2.23)$$

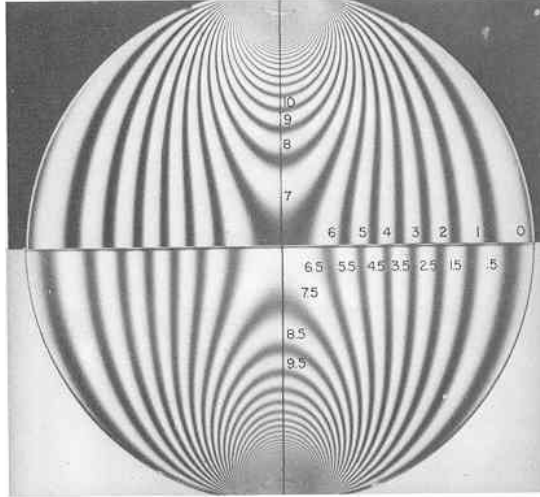
$$N = \frac{\Delta}{2\pi} = n \quad (2.2.24)$$

כלומר בשדה שחור ערכו של כל פס איזוכרומטי הוא מספר שלם והפסים נספרים בצורה 0,1,2,...

כעת נביט בעצמת האור המתקבלת אחרי המפענח בשדה לבן

$$I = K \cos^2 \frac{\Delta}{2} \quad (2.2.25)$$

$$\Delta/2 = (2n+1)\pi/2 \quad n=0,1,2,\dots \quad \text{הוא תנאי האיפוס במקרה זה}$$



איור 30 דיסקה פוטואלסטית תחת העמסה צרית. שילוב של תמונה משדה שחור בחלק העליון ומשדה לבן בחלק התחתון נותנת את שדה המאמצים בצורה מלאה [Durelli & Riley (1965)].

אם נחזור על התהליך שהוביל למשוואה (2.2.24) נקבל

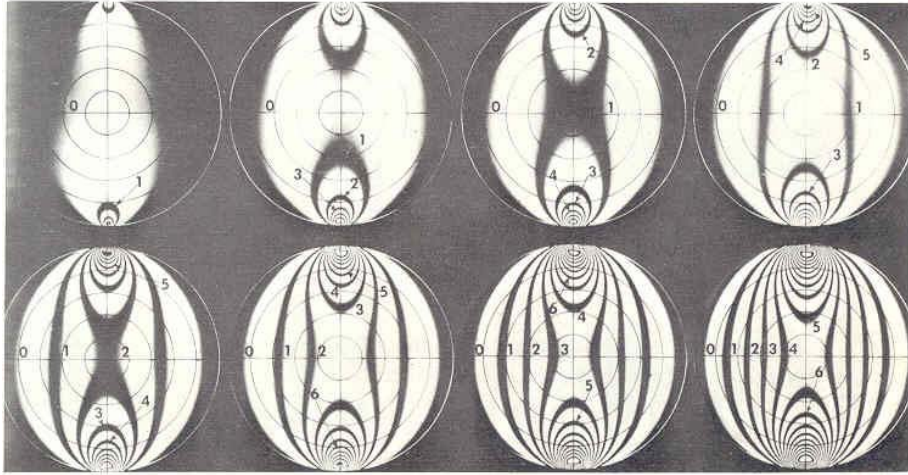
$$N = \frac{\Delta}{2\pi} = n + \frac{1}{2} \quad (2.2.26)$$

כלומר בשדה לבן הפסים האיזוכרומטיים נספרים בצורה של  $1/2, 3/2, 5/2, \dots$ . לסיכום ניתן לראות מאיור 30 שתמונה מלאה של שדה המאמצים בגוף מושגת על ידי שילוב בין תמונות משדה שחור ולבן יחדיו. ההפרש במקרה זה יהיה של חצי פס.

### 2.2.8 פענוח התמונה הפוטואלסטית

פענוח התמונה המתקבלת אחרי המפענח יכול להיות מורכב מאד כתלות בגיאומטריה ותנאי השפה. מלבד המקור שעל פיו נכתבה הסקירה ניתן לציין גם את פרסומם של Durelli & Shukla (1983) שמציג קיום מנחים לעבודת הפענוח. היות ובמקרה שלנו גיאומטריה הגוף הנבחן פשוטה למדי וכך גם העומס המופעל עליו מספיק לציין מספר נקודות כלליות.

- ניתוח הפסים לא מאפשר להבחין בין מתיחה ולחיצה.
- ככל שהפסים צפופים יותר גרדיאנט המאמצים גדול יותר כפי שניתן לראות באזורי הלחיצה.
- בזמן תהליך דינמי הפסים יוצאים מאזור הפעלת הכוח ומתרחקים ממנו. מאחר ובמקרה שלנו נקודת היצירה של הפסים בנקודת הפעלת הכוח ברורה מאד ניתן לעקוב אחרי היווצרותם ולדעת את סדרי הפס השונים בכל רגע.



איור 31 היווצרות הפסים האיזוכרומטיים בדיסקה תחת העמסה צירית. התמונות מסודרות משמאל לימין מלמעלה למטה [Durelli & Riley (1965)].

### 2.3 קבלת שדה המאמצים

שיטות שונות פותחו במשך השנים לקבלת שדה המאמצים המוחלט מתוך תמונת הדגם המתקבלת אחרי המפענח. בחלק מן המקרים מבוססות שיטות אלה על ידיעת פתרון אנליטי חלקי או מלא של שדה המאמצים בדגם. במקרה שלנו לאחר שנעשתה ההנחה כי הגוף נמצא במצב העמסה קווי-סטטי נעשה שימוש בטכניקה נומרית שפותחה על ידי Shukla & Nigam (1985) במטרה למצוא לבסוף את כוח המגע. טכניקה זו מבוססת על הפתרון האנליטי של Smith & Liu (1953) הנתון במשוואה (2.1.10) וכולל בתוכו גם כוחות חיכוך על המשטח. הפתרון כרוך במציאת ערכי שני הנעלמים ממשוואות (2.1.10) שהם  $b$ -רוחב שטח המגע ו  $\beta$ -מקדם החיכוך. מציאת הנעלמים נעשית באמצעות נתונים על סדר הפס בנקודות השונות בקרבת אזור המגע וכן בעזרת ניחוש התחלתי של ערכים אלה. מתוך משוואה (2.2.20) מוגדרת הפונקציה  $g_k$  כאשר  $k$  מציין נקודה כלשהי

$$g_k = \sigma_1 - \sigma_2 - \frac{Nf_\sigma}{h} = 0 \quad (2.3.1)$$

יש להניח כי עבור ניחוש התחלתי יתקבל  $g_k \neq 0$  ואז יש צורך לשפר את הערכת הפרמטרים בצורה איטרטיבית. לשם כך נעשה שימוש בפיתוח לטור טיילור עבור  $g_k$  והתקבלה משוואת תיקון מהצורה

$$-(g_k)_i = \left( \frac{\partial g_k}{\partial b} \right)_i \Delta b + \left( \frac{\partial g_k}{\partial \beta} \right)_i \Delta \beta \quad (2.3.2)$$

כאשר  $i$  הוא מספר האיטרציה.

כעת ניתן לשלב את השיטה האיטרטיבית בסדרת משוואות מהצורה של משוואה (2.3.1) ולרשום

$$\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_k \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \partial g_1 / \partial b & \partial g_1 / \partial \beta \\ \partial g_2 / \partial b & \partial g_2 / \partial \beta \\ \vdots & \vdots \\ \partial g_k / \partial b & \partial g_k / \partial \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta b \\ \Delta \beta \end{bmatrix} \quad (2.3.3)$$

ובצורה תמציתית יותר

$$[g] = [a][\Delta c] \quad (2.3.4)$$

כעת ניתן למצוא את  $[\Delta c]$  מתוך

$$[g] = [d]^{-1}[e] \quad (2.3.5)$$

כאשר

$$[d] = [a]^T [a] \quad (2.3.6)$$

$$[e] = [a]^T [g]$$

לאחר שהתקבלו  $\Delta b$  ו  $\Delta \beta$  ניתן לשפר את הניחוש ההתחלתי של  $b$  ו  $\beta$  על ידי

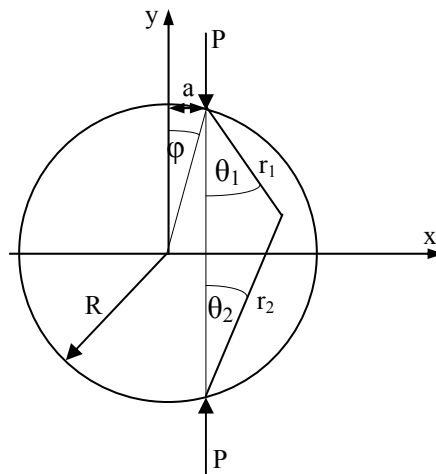
$$\begin{aligned} b_{i+1} &= b_i + \Delta b \\ \beta_{i+1} &= \beta_i + \Delta \beta \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

כעת יש לבדוק את ההתכנסות של  $g_k$  פעם נוספת. לרוב ההתכנסות מהירה למדי ולא עולה על עשר איטרציות. במעבדה גילינו שבדרך כלל חשובה גם כמות הנקודות ומיקומן בכדי לקבל התכנסות.

לבסוף עשו הכותבים שימוש במשוואה (2.1.11) לחישוב כוח המגע. השגיאה בין כוח מדוד למחושב לא עלתה על 5% עבור מיקרים עם חיכוך וללא חיכוך.

## 2.4 פתרון אנליטי לדיסקה תחת כוח מרוכז

בכדי לקבל מושג על צורת שדה המאמצים בדיסקה תחת העמסה סטטית גם מחוץ



איור 32 דיסקה תחת העמסה מקבילה של שני כוחות מרוכזים

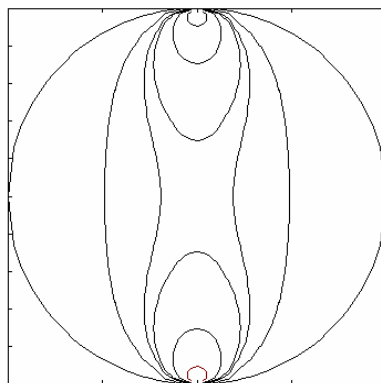
לאזור המגע, נעשה שימוש בפתרון של Hertz עבור דיסקה תחת העמסה מקבילה של כוחות מרוכזים [איור 32]. הפתרון לקוח מתוך Timoshenko & Goodier (1970).

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{2P}{\pi} \left[ \frac{\sin^2 \theta_1 \cos \theta_1}{r_1} + \frac{\sin^2 \theta_2 \cos \theta_2}{r_2} \right] + \frac{P}{R\pi} \cos \varphi \\ \sigma_y &= -\frac{2P}{\pi} \left[ \frac{\cos^3 \theta_1}{r_1} + \frac{\cos^3 \theta_2}{r_2} \right] + \frac{P}{R\pi} \cos \varphi \\ \tau_{xy} &= \frac{2P}{\pi} \left[ \frac{\sin \theta_1 \cos^2 \theta_1}{r_1} - \frac{\sin \theta_2 \cos^2 \theta_2}{r_2} \right]\end{aligned}\quad (2.4.1)$$

אם  $a$  הוא המרחק האופקי בין ציר  $y$  וציר הפעלת הכוח (איור 32) ו  $h$  מצוין את המרחק האנכי מהקוטר האופקי של הדיסקה למיקום הפעלת הכוח נקבל כי הפרמטרים השונים הם:

$$\begin{aligned}\varphi &= \arcsin\left(\frac{a}{R}\right) & h &= R \cos \varphi \\ r_1 &= \sqrt{(x-a)^2 + (h-y)^2} & r_2 &= \sqrt{(x-a)^2 + (h+y)^2} \\ \theta_1 &= \arcsin\left(\frac{x-a}{r_1}\right) & \theta_2 &= \arcsin\left(\frac{x-a}{r_2}\right)\end{aligned}$$

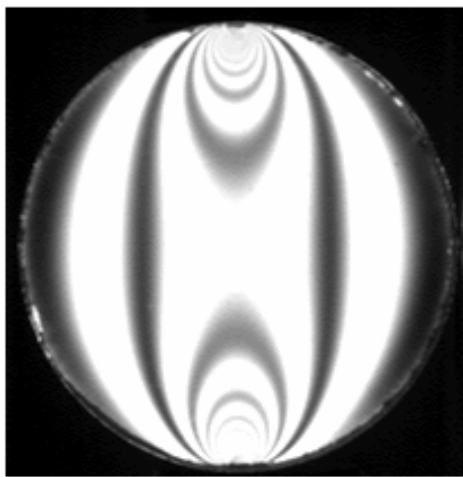
במקרה שלנו מדובר על העמסה צרית ולכן  $a=0$   $h=R$   $\varphi=0$ . ניתן לראות כי הקטרים הם מישורי סימטריה שלאורכם מאמץ הגזירה שווה לאפס וכן כי המאמץ הניצב לדופן הדיסקה שווה לאפס. במשוואות אלה כמו במשוואות (2.1.10) מתקבל ערך אינסופי בנקודות המגע.



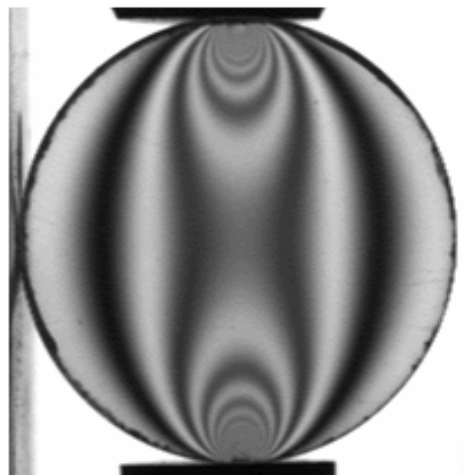
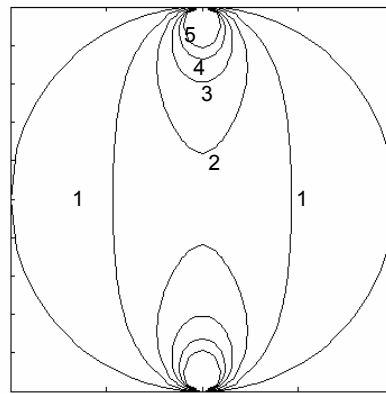
איור 33 דיסקה תחת העמסה צרית- דוגמא לקיום שלאורכם מאמץ הגזירה המרבי קבוע.

מעניין לראות כי הצגת שדה מאמץ הגזירה המרבי  $\tau_{\max}$  ברחבי הדיסקה מאפשרת קבלה של קווים שלאורכם מאמץ הגזירה המרבי קבוע (איור 33). ניתן לחלק קווים אלה לשני אזורים עיקריים. באזור המגע קווים מעגליים, שהולכים וגדלים עד אשר נוצר מפגש בין מעגלים המגיעים משתי נקודות המגע. בשלב זה נקבל קווים סימטריים סביב ציר ה-y הנעים לכיוון דפנות הדיסקה. צורת פילוג זו של שדה מאמץ הגזירה המרבי זהה לפילוג הפסים האיזוכרומטיים שמתקבל בתמונות הפוטואלסטיות כאשר הקשר בין הערכים נתון לפי החוק הפוטואלסטי (משוואה 2.2.20).

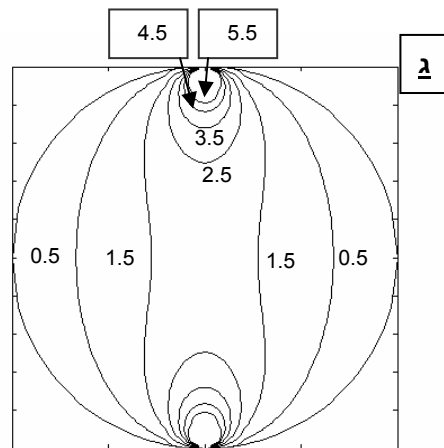
חשוב לציין כי בתמונה שקיבלנו בצילום הפוטואלסטי קשה מאד להבחין בפסים האיזוכרומטיים באזור המגע עקב צפיפותם הרבה. מכאן שהשוואה ויזואלית בין הניסוי לפתרון האנליטי (איור 34) תתקיים רחוק מאזור זה ותסתמך על משוואות (2.4.1).



ב



ד



איור 34 השוואה בין פתרון אנליטי לדיסקה בהעמסה צירית של כוח מרכז לבין תמונת דיסקה תחת העמסה צירית בשיטה הפוטואלסטית. הפתרון האנליטי מגיע עם ציון הפסים האיזוכרומטיים המתאימים. (א) פתרון אנליטי לשדה שחור (ב) תמונה פוטואלסטית בשדה שחור (ג) פתרון אנליטי לשדה לבן (ד) תמונה פוטואלסטית בשדה לבן.



### 3 מערכת הניסוי וההדמיה

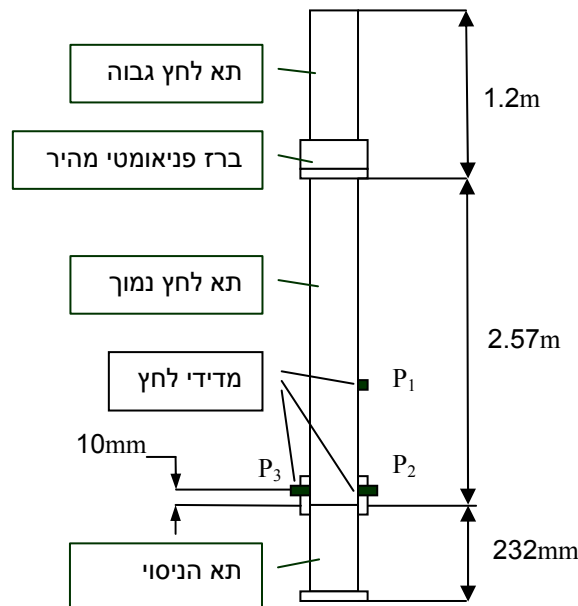
#### 3.1 מערכת הניסוי

מערכת הניסוי שבמעבדה הורכבה מארבעה חלקים עיקריים:

- ניקבת ההלם (shock tube) המייצרת את אות ההעמסה.
- תא הניסוי המכיל את המבנה הגרגרי העשוי שרשרת דיסקות פוטואלסטיות.
- מערכת הצילום הכוללת את הפולריסקופ, הלייזר, המצלמה והמחשב עליו נשמרים הנתונים.
- מערכת הבקרה לתזמון הצילום.

#### 3.1.1 ניקבת ההלם

ניקבת ההלם נבחרה להיות האמצעי להפעלת העומס עקב זמינותה במעבדה, היכולת ליצור בעזרתה העמסה אחידה על פני כל השטח במבנים דו-ממדיים והאפשרות הקיימת לשנות את אות ההעמסה באופן פשוט יחסית. יתרונות נוספים בשימוש בניקבת ההלם הם האפשרות למדוד את פרופיל הלחץ בכניסה לתא הניסוי וכן האפשרות ליצור מצב של לחץ התחלתי (pre-loading) על המבנה הגרגרי באופן פשוט.



איור 35 תיאור סכמטי של ניקבת ההלם ותא הניסוי

ניקבת ההלם בה השתמשנו היא נקבה אנכית העשויה פלדת אל-חלד בעלת חתך ריבועי בממדים של 31mm X 31mm (איור 35). הניקבה מחולקת לתא לחץ גבוה באורך 1.2m (driver) ותא לחץ נמוך באורך 2.57m (driven). בין שני התאים מצוי ברז פניאומטי

מהיר (Ista Russia) בעל זמן תגובה של 1ms המבטיח הדירות גבוהה של גל ההלם, כך שהפיזור בפילוג פרופיל הלחץ בכניסה לתא הניסוי על פני מספר ניסויים מוקטן עד לכדי אחוז אחד [Britan *at el.* (2001)]. תא הניסוי מורכב בקצה התחתון של ניקבת ההלם כלומר בקצה התחתון של תא הלחץ הנמוך. לאורך תא הלחץ הנמוך הורכבו שלושה מתמרי לחץ פיאזואלקטריים. האות החשמלי מהמתמרים הוגבר באמצעות מגבר מטען (kiag, Swiss) מודל 5001). מתמרי הלחץ  $p_1$  ו  $p_2$  מתוצרת PCB model 132A35 (טבלה 1), משמשים כמערכת למדידת מהירות גל ההלם.  $p_2$  המצוי 10mm מתא הניסוי נותן אינדיקציה על מעבר גל ההלם וכן מודד את פרופיל הלחץ בכניסה לתא הניסוי. המתמר השלישי  $p_3$  מחובר בדיוק מול  $p_2$  והוא מתמר הפרשי מתוצרת Kistler model 603B1 (טבלה 1). תזמון מערכת הצילום מבוסס על האות המתקבל ממתמר זה.

Kistler-603B1		PCB-132A35		
1034	bar	345	kPa	טווח מדידה
-507	pC/bar	20.3	mV/kPa	רגישות
1	$\mu$ sec	$\leq 3$	$\mu$ sec	זמן תגובה(גל ראשי)
		$\leq 0.5$	$\mu$ sec	(גל מוחזר)
קוורץ		קרמיקה		אלמנט חישה

טבלה 1 נתונים טכניים של מתמרי הלחץ

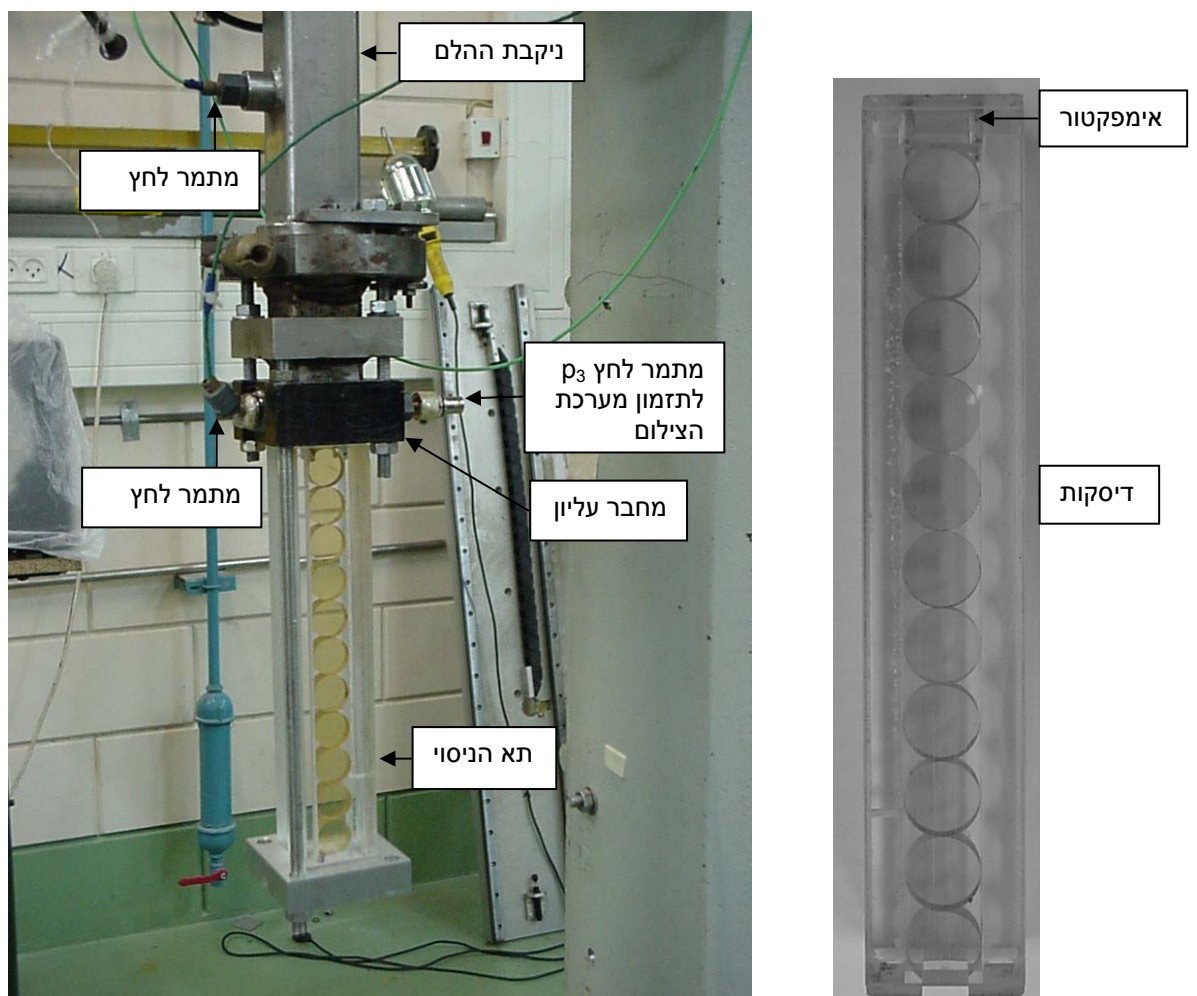
הגז בניקבה הוא אויר הממולא באמצעות מדחס לתא הלחץ הגבוה. בתא הלחץ הנמוך שורר בדרך כלל לחץ אטמוספרי אולם כאשר רוצים ליצור מצב של לחץ סטטי התחלתי על תא הניסוי ניתן למלא גם אותו באמצעות מדחס ללחץ הרצוי. לאחר שהתאים מלאים בגזים בלחצים הרצויים והברז הפניאומטי נפתח ניתן לקבל בגיאומטריה הנתונה פרופיל לחץ בצורת מדרגה בכניסה לתא הניסוי.

### 3.1.2 תא הניסוי והמבנה הגררי

תא הניסוי [איור 36 (א)] נבנה כולו מפרספקס כך שניתן יהיה לבצע דרכו מדידה אופטית וכן כי הבניה היתה פשוטה מאד בהשוואה לתא מתכת עם חלונות פרספקס. אורך של 232mm וחתך מלבני במידות של 10mm X 20.2mm נקבעו בכדי להכניס לתא 11 דיסקות ואימפקטור. האימפקטור הוא חתיכה מלבנית העשויה מהחומר ממנו עשויות הדיסקות והוא מוצב בראש שרשרת הדיסקות. רוחב האימפקטור הוא כקוטר הדיסקות, עוביו כעובי הדיסקות ואורכו 12mm. תפקיד האימפקטור הוא לוודא שגל ההלם המישורי המתקדם בניקבת ההלם ופוגע בראש תא הניסוי יראה מולו שטח מישורי כך שלא יוצרו הפרעות

בפרופיל הלחץ אחרי הגל המוחזר. לכן האימפקטור סופג את מכת גל ההלם ומעביר אותה לדיסקה שמתחתיו.

קצוות תא הניסוי הוכנסו כל אחד לתוך מחבר בעל חתך מלבני ושני המחברים חוברו ביניהם בעזרת ברגים לחיזוק התא. בחלק העליון יש למחבר שלושה תפקידים נוספים, האחד הוא להוות בסיס לחיבור תא הניסוי לניקבת ההלם [איור 36 (ב)], השני הוא להוות בסיס למיקום מתמרי הלחץ הקרובים לתא הניסוי ( $p_2$  ו  $p_3$ ), והשלישי הוא לתמוך בפיסת גומי שתהווה חיץ בין תא הניסוי לחלל נקבת ההלם ותמנע פילטרציה של אויר אל תוך תא הניסוי. כך נוצר מצב שגל ההלם המתקדם בתוך הגז בנקבת ההלם הופך לגל מאמץ הנע בתוך הדיסקות המוצקות בתא הניסוי.



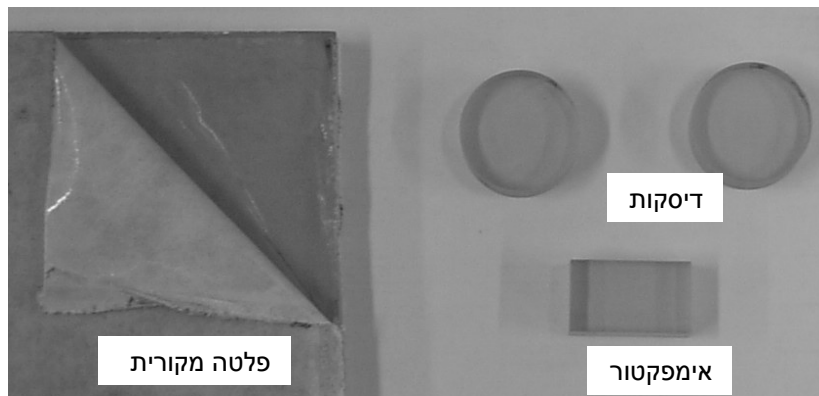
איור 36 (א) תא הניסוי (ב) תא הניסוי מורכב לניקבת ההלם

המבנה הגרגרי הורכב כאמור מדיסקות פוטואלסטיות העשויות חומר אפוקסי בעל השם המסחרי PSM-9. הדיסקות בקוטר ממוצע של 20mm נחתכו ועובדו מתוך פלטה בעובי ממוצע של 9.5mm מתוצרת Vishay Measurements Group, USA (איור 37). התכונות

המכניות והפוטואלסטיות של החומר נבדקו במעבדה כמפורט בנספח א. והן מפורטות בהשוואה לנתוני היצרן בטבלה 2.

הערך לפי נתוני יצרן	הערך לפי מדידה במעבדה	יחידות	התכונה
0.36	0.378		יחס פואסון ( $\nu$ )
3.3E9	4.6 E9	N/m <sup>2</sup>	מודול האלסטיות (E)
10500	10130	N/m/fringe	הקבוע הפוטואלסטי ( $f_{\sigma}$ )
–	1240	Kg/m <sup>3</sup>	צפיפות ( $\rho$ )

טבלה 2 תכונות חומר הפוטואלסטי PSM-9



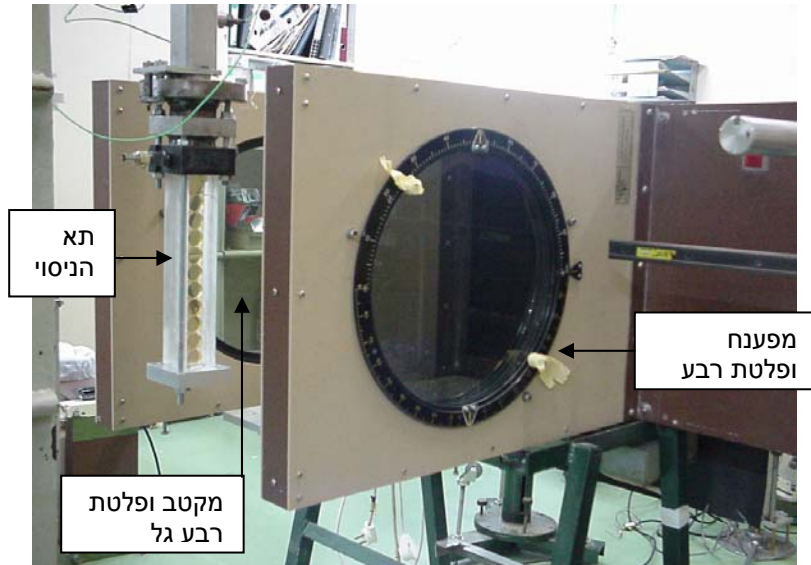
איור 37 החומר הפוטואלסטי PSM-9 במצב גולמי משמאל ואחרי עיבוד מימין

### 3.1.3 מערכת הצילום

מערכת הצילום מורכבת ממקור האור, הפולריסקופ והמצלמה עם התוכנה המתאימה הפועלים כמערכת שלמה לקבלת תמונה פוטואלסטית.

### 3.1.4 הפולריסקופ

בניסוי נעשה כאמור שימוש בפולריסקופ מעגלי שעקרון פעולתו הוסבר בסעיף (2.2.6). הפולריסקופ הוצב כך שתא הניסוי ניצב במרכזו כמראה באיור 38. מכיוון המקטב ניצב מקור האור ואחרי המפענח הוצבה המצלמה.



איור 38 הפולריסקופ ותא הניסוי

### 3.1.5 מקור האור

לייזר דיודה (Q-switch YAG Laser) מתוצרת Lightwave Electronics, USA מודל M210G שימש במקור אור מונוכרומטי בעל אורך גל של 532nm. לייזר זה הוא בעל יכולת לייצר קרן רציפה או הבזקים באורך 90nsec. בעוד קרן רציפה יעילה מאד בעת ביצוע כיוונים של המערכת וכן עבור ניסויים סטטיים, הרי ההבזקים משמשים בעיקר עבור ניסויים דינמיים. הלייזר ניתן גם להפעלה באמצעות אות חשמלי ממקור חיצוני (trigger). היות ואלומת האור נפלטת מהלייזר בצורה מרוכזת היה צורך להוסיף מערכת אופטית שתקנה לאלומה חתך שיתאים לחתך תא הניסוי ושתגרום לפיזור אחיד של האור על התא. לשם כך הוספה עדשה גלילית המקנה לאלומה היוצאת מהלייזר חתך מלבני וכן הוסף לפני הפולריסקופ מפזר אור (diffuser) העשוי חומר שקוף למחצה כך שיווצר פיזור אחיד של אור על תא הניסוי.

### 3.1.6 המצלמה והמחשב

מצלמת CCD (Sony, XC75, Japan) הוצבה כאמור אחרי המפענח. על המצלמה הורכבה עדשה מסוג Helius, USSR מודל 44M. מצלמה זו נבחרה עקב העובדה שהיא מאפשרת תמונה דיגיטלית באיכות גבוהה בכל שלבי הניסוי והכנתו ובו בזמן חוסכת את זמן הפיתוח וההעברה למחשב הנדרש במצלמה מהירה עם סרט צילום רגיל. המצלמה חוברת לכרטיס קריאה Meteor 2- Frame Grabber, MC/4 מתוצרת Matrox, USA ובעזרת תוכנה תואמת Intelicam 6.1 של אותה חברה ניתן לקבל תמונה רציפה על מסך המחשב ( PC, Intel Pentium 4). התמונה הרציפה היא אפשרות נוחה מאד בעת כיוון המערכת אך אין אפשרות לשמור את סרט הוידאו. האפשרות הקיימת לשמירה היא של תמונה בודדת. אפשרות זו ניתן לנצל במצב סטטי, או שניתן לשלב יכולת זו עם היכולת של כרטיס הקריאה



איור 39 מצלמת ה CCD עם העדשה

להפעיל את המצלמה באמצעות אות חשמלי חיצוני (trigger) לצילום במצב דינמי. שילוב זה נוצל על מנת לקבל תמונה אחת של שדה המאמצים במבנה הגרגרי עבור כל ניסוי. חשוב לציין שבכדי לקבל תמונה טובה יותר הוגבל שטח הצילום של המצלמה כך שבכל תמונה צולמו שש דיסקות בלבד, לשם כך קובעה המצלמה לבסיס היושב על מסילה לולינית וניתן היה להניע אותה למיקום הנדרש. כך שלקבלת צילום מלא של שרשרת בת 11 דיסקות צולמו שני צילומים בשני ניסויים שונים, כאשר הדיסקה השישית צולמה פעמיים ושמשה לבדיקת ההדירות.

### 3.1.7 מערכת הבקרה

מערכת זו מתזמנת את הפעלת הלייזר ומצלמת ה- CCD בהתאם לזמן הגעת גל ההלם הנע בניקבת ההלם לתא הניסוי ובהתאם לזמן ההשהייה אותו קבענו מראש. המערכת מתחילה את פעולתה במתמר הלחץ  $p_3$  המוציא את האות החשמלי המבשר על הגעת גל ההלם (trigger). אות זה עובר למכשיר הקובע את זמן ההשהייה (Time Delay Generator, Bnc, England) לפני שהוא ממשיך למערכות השונות. מכשיר זה מאפשר לקבוע זמן השהייה שונה בכל ערוץ יציאה וכך לתזמן מערכות שונות בצורה שונה ביחס לאות הכניסה. במקרה שלנו היה צורך לתזמן את הלייזר ואת המצלמה (המתוזמנת באמצעות כרטיס הקריאה) אולם היות ולמצלמה זמן תגובה מעט ארוך יותר, הלייזר תמיד קיבל השהייה ארוכה יותר ב-  $1\mu s$ .

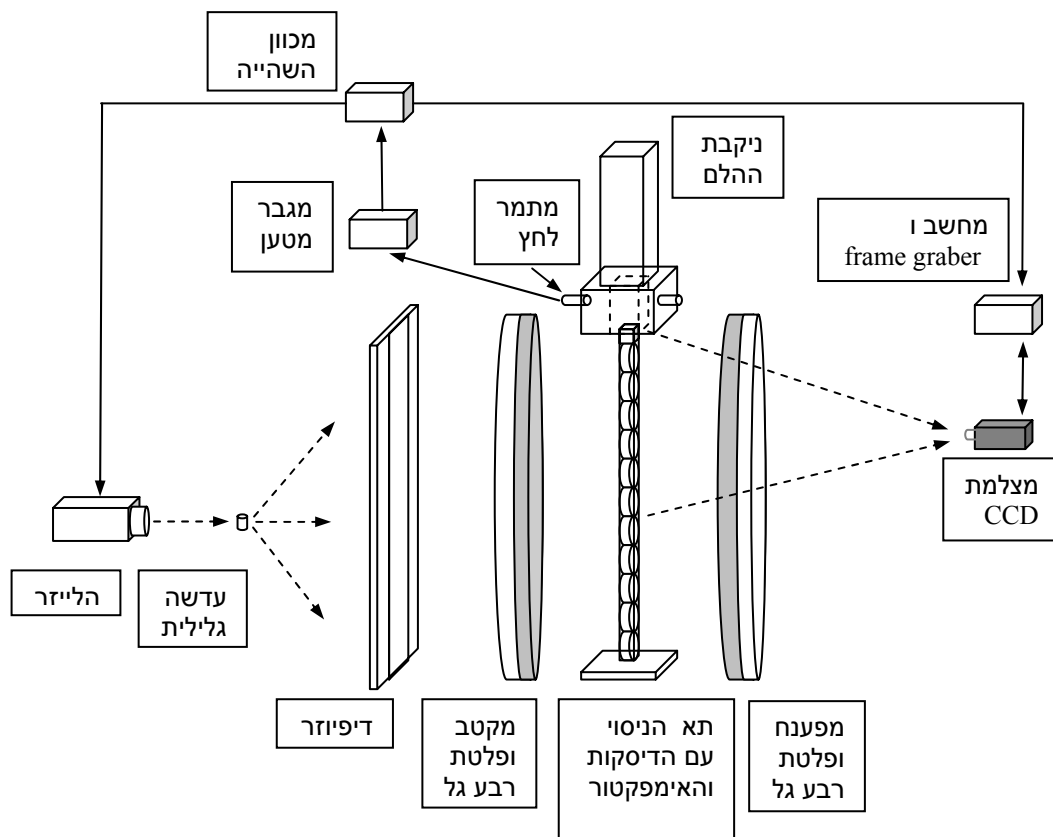
### 3.1.8 פעולת מערכת הניסוי הפוטואלסטית

לאחר הצבת הפולריסקופ, תא הניסוי וכיוון המערכת האופטית כלל ניסוי במערכת את השלבים הבאים:

- מילוי תאי הלחץ בניקבת ההלם.
- העברת המצלמה והלייזר למצב המתנה לאות החיצוני.

• פתיחת הברז הפניאומטי.

ברגע זה נוצר גל הלם בניקבת ההלם. גל ההלם התקדם ומעט לפני תא הניסוי קלט מתמר הלחץ  $p_3$  את השינוי בלחץ עקב גל ההלם והוציא אות חשמלי שהוגבר והגיע למכשיר הקובע את ההשהייה. כאשר הגיע גל ההלם לתא הניסוי הוא התנגש חזיתית באימפקטור, גרם להפעלת לחץ ולהתקדמות גל מאמץ לתוך המבנה. בהתאם להשהייה שנקבעה הופעלה המצלמה ואחריה הלייזר כך שלאחר מעבר הבזק האור שנוצר בלייזר דרך הפולריסקופ ותא הניסוי הוא נקלט במצלמה. התהליך הסתיים בשמירת התמונה על המחשב.



איור 40 תרשים סכמטי של מערכת הניסוי

לסיכום ניתן לראות כי המערכת המתוארת באיור 40 מהווה מערכת ניסוי שלמה לחקירה פוטואלסטית של תווך כלשהו תחת העמסה דינמית. מערכת זו מסוגלת להוציא סדרה של צילומים עבור זמנים שונים של התהליך ולעקוב אחרי התפתחותו.

### 3.2 המודל הנומרי

ההדמיה של התקדמות גלים בשרשרת ישרה יחידה של דיסקות התבצע כאמור באמצעות תוכנת ABAQUS המבוססת על פיתרון באמצעות שיטת האלמנט הסופי.

בניית המודל הורכבה ממספר שלבים כאשר בשלב הראשון נבנתה הגיאומטריה כפי שהיא מופיעה בניסוי והחלקים השונים קיבלו את תכונות החומר בהתאם לניסוי. בכדי לחסוך זמן חישוב נבחרה גיאומטריה דו-ממדית בעלת משטח סימטריה. בחלקה התחתון של השרשרת הונח משטח קשיח. חשוב לציין כי בשלב הסופי של הניסוי נעשה שינוי קטן בגיאומטריה, כאשר האימפקטור חולק לשנים ובעוד חלק אחד נשאר בראש השרשרת החלק השני הונח בחלקה התחתון. שינוי זה לא בוצע בהדמיה. גיאומטרית המודל מוצגת באיור 41(א) וכאמור, תנאי שפה של סימטריה הוקנו לכל אורך המודל ותנאי של ריתום הוקנה למשטח הקשיח בתחתית. עבור התוצאות שיוצגו בהמשך נעשה שימוש בתכונות החומר שנמדדו במעבדה כפי שהן מופיעות בטבלה 2.

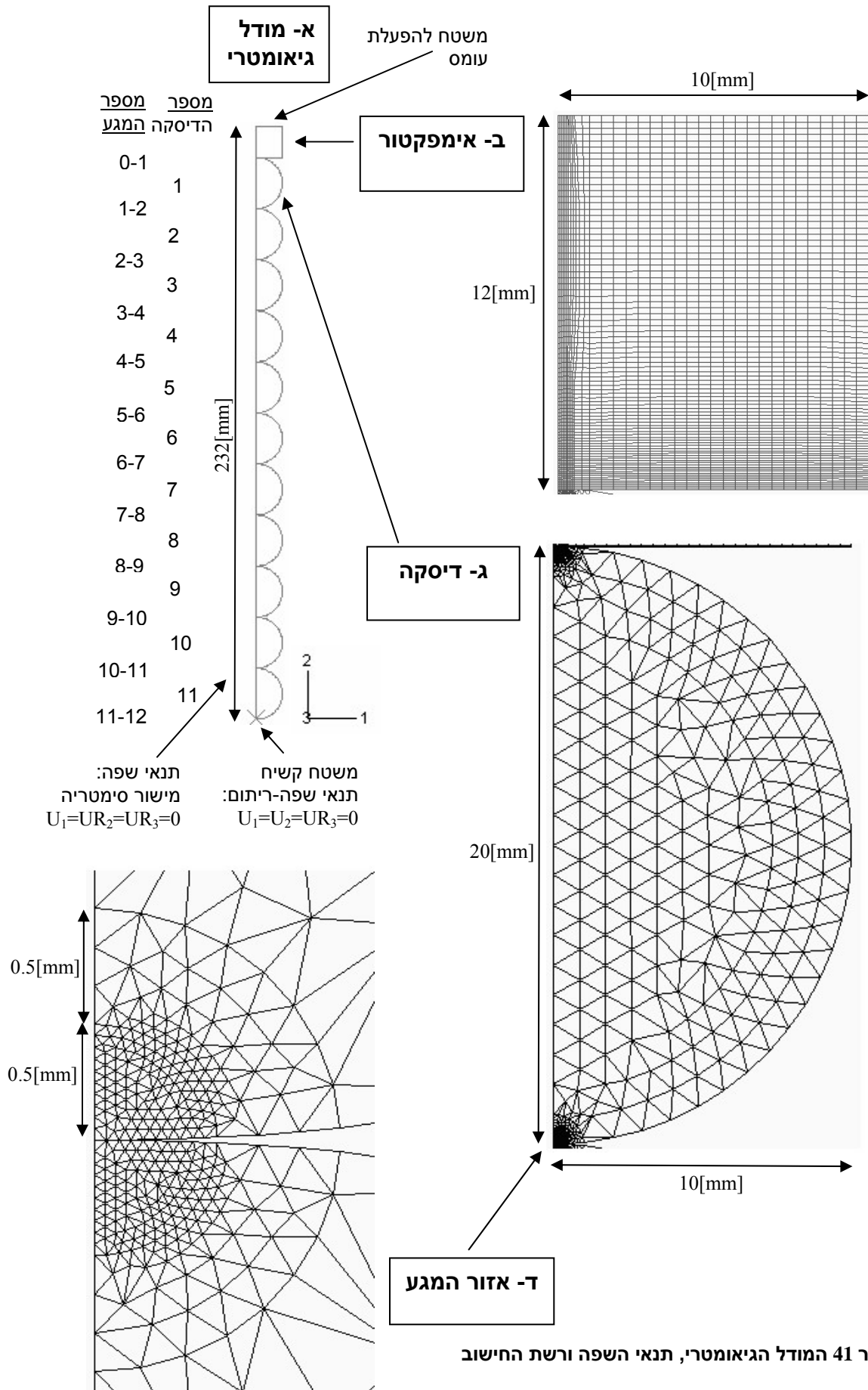
בשלב השני היה צורך בהגדרת הקשר בין החלקים השונים. זהו השלב הבעייתי בבניית המודל גם מבחינת הבנת המרכיבים השונים הקיימים בתוכנה וגם בהתאמה למודל הניסוי. התוכנה מעמידה לרשות המשתמש מספר מאפיינים להגדרת התנהגות המגע. המאפיינים מייצגים מנגנונים מכניים שונים של קשיחות וריסון המגע, אולם קשה מאד לקבוע מהו המאפיין או שילוב המאפיינים המתאים יותר לתיאור התנהגות המגע בניסוי. כפי שראינו בסעיף 1.2.2.2 גם בתוכנה בה עשינו שימוש, לקשיחות המגע השפעה מרבית על מהירות הגל ולכן גם על אורכו ולריסון המגע השפעה על דעיכה הגל.

בנוגע לאלגוריתם המגע שהוא בעצם האחראי על יצירת קשר המגע בין הגופים, התוכנה מכילה אלגוריתם מגע מסוג Penalty המאפשר למשתמש את שינוי קשיחות המגע לפי בחירתו. לגבי מנגנון בליעת האנרגיה, נבדקה האפשרות לשלב מלבד ריסון המגע (contact damping) הקשור רק בכוחות המגע גם ריסון חומר (material damping). מבין שתי הצורות לריסון החומר נבחרה זו שבה הריסון פועל על מטריצת הקשיחות. ריסון זה מופעל על כל האלמנטים במודל ויש לו גם השפעה ניכרת על הקטנת צעד הזמן בחישוב. מלבד היותו מנגנון לבליעת אנרגיה ריסון החומר משפיע בצורה ניכרת גם על מהירות הגל ולמעשה הוא מקשיח את המבנה. עבור ריסון גבוה יותר התקבל ערך גבוה יותר למהירות הממוצעת. שימוש במנגנון כזה גם מצריך התאמה מחודשת של קשיחות המגע. בשלב הסופי נזנח השימוש במנגנון זה בעיקר בגלל בעיות התאמה לניסוי וזמן ההרצה הארוך שנדרש לכל הדמיה. ניתן גם לציין כי לא נתקלתי בשימוש במנגנון מסוג זה בספרות.

חשוב לציין שנושא בליעת האנרגיה הינו בעל חשיבות רבה מאחר ותוצאות הניסויים מציגות בצורה בולטת דעיכה באותות השונים. היות ובניסוי הפוטואלסטי קשה לזהות סימנים לחיכוך יש להשתמש במנגנוני בליעה אחרים.

כאמור למעלה שלב זה הכיל בתוכו גם את התאמת המודל הנומרי (בחירת ערכי המאפיינים השונים) לתוצאות הניסוי. הבעיה שעמדה בפנינו נבעה מהאבחנה המוקדמת כי פרטים שונים בעלי השפעה מרובה על צורת הניסוי וההדמיה לא היו ידועים בשלב זה של





איור 41 המודל הגיאומטרי, תנאי השפה ורשת החישוב

הניסוי. בין השאר מדובר בפרטים כגון:

- 1) גיאומטרית הדיסקות שנחתכו במעבדה כאשר אנו הנחנו שהן עגולות בצורה מושלמת.
  - 2) טיב פני השטח של הדיסקות, פרט בעל חשיבות מרובה בהגדרת המגעים בינהן.
- היות ולא וידאנו על ידי עומס התחלתי כי לפני הניסוי אין מרווחים בין הדיסקות, יתכן כי קיימים מרווחים מזעריים. יתכן גם כי מרווחים אלה משתנים בין ניסוי לניסוי.
- לשם בדיקת ההשפעה של המרווחים בין הדיסקות על מהירות הגל נערכה הדמיה שבה הוכנסו בין הדיסקות מרווחים בסך כולל של  $10\mu\text{m}$ . המהירות הממוצעת שנמדדה עבור גל המאמצים הראשוני (transmitted stress wave-TSW) היתה נמוכה ב- $16\text{m/s}$  מהמהירות בשרשרת ללא מרווחים. גידול נוסף במרווח היה מגדיל גם את ההפרש במהירות. מכאן ניתן לראות כי ללא ידיעת תנאי השפה בין הדיסקות לא ניתן לדייק במהירות הגלים.

פרטים אלה הביאו להחלטה לכוון באמצעות קשיחות המגע את מהירות ה-TSW בהדמיה לסביבות ה- $500\text{m/s}$  (קצת מעל למהירות שהתקבלה בניסוי) ולבדוק מה מתקבל בהמשך התהליך. כיוון המהירות נעשה תוך הקניית ערך של  $0.01$  למקדם הקשור באלגוריתם המגע. מקדם זה מציין במקרה שלנו קשיחות מגע שאינה גבוהה או לחילופין מגע רך. ריסון המגע שנבחר מציין תלות של כוחות המגע בשטח והוא בעל ערך של  $1\text{MPa/mm/ms}$ .

לבסוף היה צורך ליצור את רשת החישוב. לאחר ניסיון עם מספר רשתות חישוב נבחרה רשת המורכבת מאלמנטים משולשים בעלי שלושה צמתים לאלמנט. עידון של הרשת בוצע בשני שלבים לכיוון אזורי המגע. כך התקבל לבסוף משטח מגע שאורכו  $0.5\text{mm}$  והוא רושת בעשרה אלמנטים. רישות זה אפשר מעקב אחרי השינויים העדינים באזור המגע. האלמנטים שנבחרו אפשרו מצב מאמצים מישורי והם מסוג CPS3 (לפי ספרית האלמנטים של ה-Abaqus). רשת החישוב בחלקים השונים של המודל הגיאומטרי מוצגת באיור 41. בדיקת רשת החישוב בוצעה בשני שלבים. ראשית בוצעה השוואה של תוצאות המודל תחת העמסה סטטית לתוצאות אנליטיות (ניספח ב') ובשלב השני נבדק המודל תחת העמסה דינמית אל מול תוצאות הניסוי.

בנוסף יש לציין שתי נקודות, האחת היא כי בכל ההדמיות ישנה התייחסות רק למגע נורמלי בין המשטחים ולא מוגדר חיכוך כלשהו ואילו הנקודה השניה היא כי קיימת אפשרות לניתוק בין הגופים.

כמובן שהעובדה כי לא היו ברשותנו תנאי השפה המדויקים בין הדיסקות הגבילה מראש את הציפיות מתוצאות ההדמיה. לכן הגדרנו כי אנו מחפשים השוואה איכותית בין הניסוי וההדמיה תוך התאמה של מספר רב ככל האפשר של מאפיינים ותופעות. עובדה זו גם הביאה אותנו בהמשך, לנסות וליצור תנאי שפה ברורים יותר על ידי הפעלת כוח סטטי מקדים בין הדיסקות.

## 4 תוצאות

פרק זה נפתח בהצגת תוצאות ההדמיה הנומרית עבור שרשרת ישרה יחידה של 11 דיסקות תחת עומס דינמי. תוצאות אלו משוות לתוצאות ניסויית שהתקבלו מעבודה שנערכה במקביל במעבדה. בהמשך מוצגות תוצאות ניסוי והדמיה למערכת זהה של 11 דיסקות הנתונות תחת עומס סטטי מוקדם לפני ההעמסה הדינמית. לבסוף נעשה שימוש במודל הנומרי לביצוע חקירה נומרית של מספר מיקרים מעניינים הקשורים בגיאומטרית הדיסקות, בצפיפותן ובאורך אות ההעמסה הפועל עליהן. חקירה זו מהווה בסיס רחב יותר להבנה של תכונות התוך הגרגרי הנלמד והיא יכולה לשמש גם בסיס להמשך החקירה הניסויית.

### 4.1 הדמיה של שרשרת ישרה יחידה בת 11 דיסקות תחת עומס דינמי.

#### 4.1.1 אופן ההעמסה

המודל המתואר בסעיף 3.2 הועמס, בפיזור אחיד על המשטח העליון של האימפקטור, בלחץ בעל פרופיל מדרגה. אות כניסה זה בעל אמפליטודה של  $3.75\text{bar}=0.375\text{MPa}$  דומה לאות הלחץ, שנמדד בניסוי מעל האימפקטור (מתמר  $p_2$ ), לאחר הגל המוחזר. אחרי עלית המדרגה נשאר פרופיל הלחץ קבוע במשך כל ההדמיה. הכוח המתקבל מהפעלת לחץ זה על משטח האימפקטור הוא גם הכוח המופעל על המודל וקיים במגעים בעת העמסה סטטית

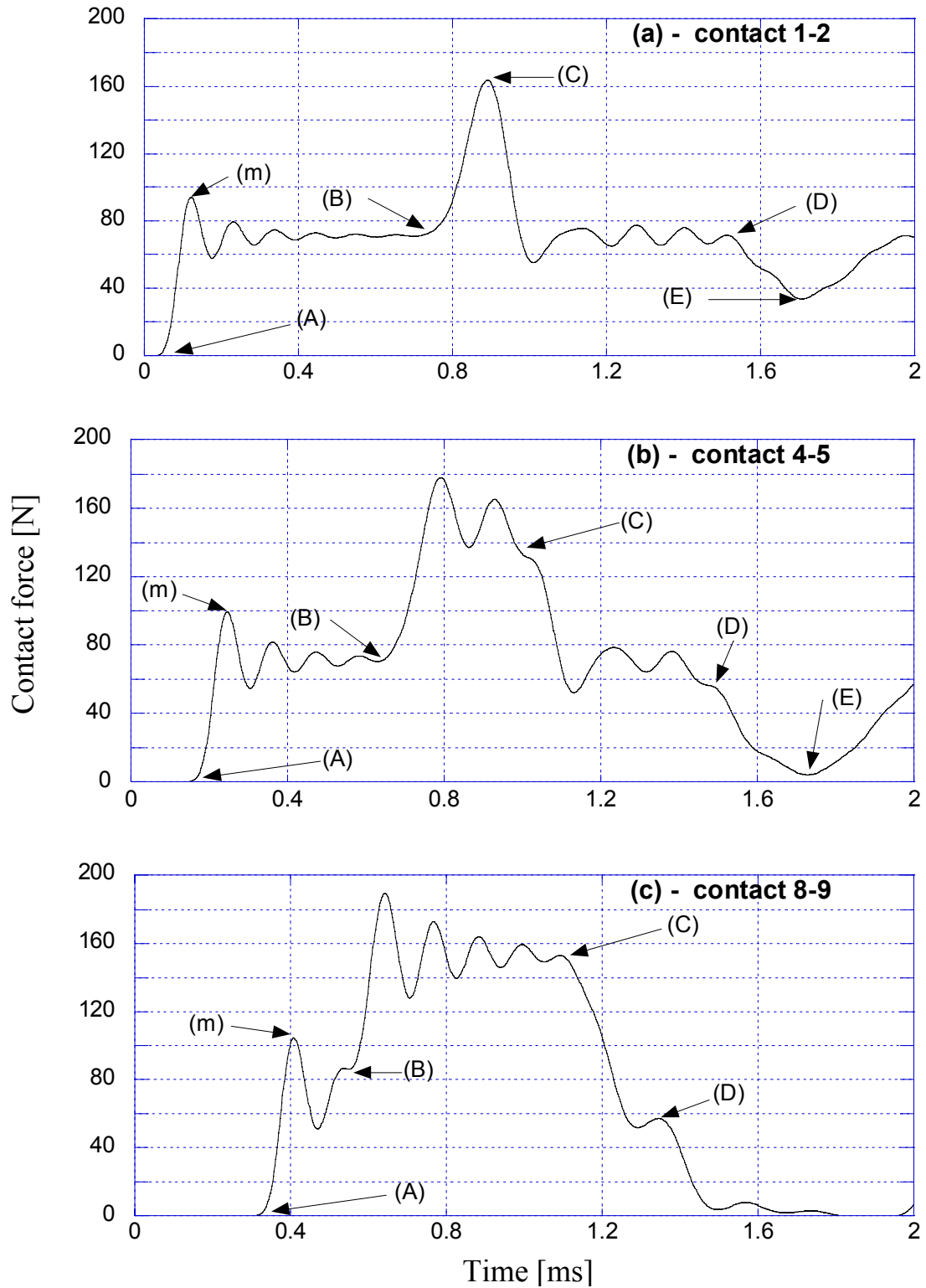
$$P_{in} = P_{stat} = 0.375\text{MPa} \cdot 0.02\text{m} \cdot 0.0095\text{m} = 71.25\text{N}$$

#### 4.1.2 תיאור מהלך הגלים

איור 42 מציג אותות של כוחות המגע (contact force) בשלושה מגעים שונים לאורך השרשרת. האותות מוצגים במשך זמן של 2ms שהוא הזמן בו ניתן לצפות בהשלמת מחזור התרחשות אחד (גל דחיסה, גל דחיסה מוחזר, גל ריזוח וגל ריזוח מוחזר) לפחות של מהלך הגלים בשרשרת.

(1) האות A מציינת את הגעת גל המאמצים הראשוני (TSW) לנקודת המגע. עם הגעת הגל ניתן לראות עליה חדה בכוח ואחריה תנודות הדועכות לערך ממוצע. ערך זה מזוהה עם ערך הכוח הסטטי ( $P_{stat}$ ) כפי שניתן יהיה לראות באיור של הכוח המנורמל המוצג בהמשך (איור 44).

(2) האות m מציינת את ערך הכוח המרבי (peak contact force) אחרי ה-TSW. ניתן לראות שככל שהמגע רחוק יותר מאזור ההעמסה [איור 42(c)] ערך הכוח המרבי גבוה יותר.



איור 42 אותות כוח המגע בשלוש נקודות לאורך שרשרת.

3) האות B מציינת את הגעת גל המאמצים המוחזר (reflected stress wave-RSW) מהתחתית הקשיחה (התחתית עשויה אלומיניום ולכן היא בעלת אימפדנס אקוסטי גבוה מזה של הדיסקות). ניתן לראות כי ככל שהמגע רחוק יותר מהתחתית [איור 42(a)] ישנן תנודות

רבות יותר עד להגעת ה-RSW. ראוי לציין כי במגע בין דיסקה 11 לבסיס הקשיח וכן במגע בין דיסקה 10 ו 11 לא ניתן להבחין כלל בנקודה B היות והגעת גל המאמצים וההחזרה מהתחתית קרובות מאד. העליה בכוח במגעים אלה הופכת רציפה.

(4) העליה בכוח אחרי נקודה B כרוכה בפגיעה של גל המאמצים\גל הדחיסה בשפה הקשיחה בתחתית. פגיעה זו גורמת לכך שגל המאמצים החוזר ישרה אחריו מאמץ גבוה מזה שהיה לפניו.

(5) גם אחרי נקודה B ניתן לצפות בעליה חדה שאחריה תנודות דועכות. אלה שהפעם התנודות דועכות לכיוון ערך הגדול ביותר מפי-2 מהערך הממוצע אחרי ה-TSW [איור 42(b) ו (c)].

(6) היות וכעת הגל נע מתחתית השרשרת לראשה הרי שבמגע הרחוק מהראש יהיו תנודות רבות יותר [איור 42(c)].

(7) נקודה C מציינת את הגעתו של גל הריווח הראשוני (-transmitted expansion wave TEW). גל זה נוצר היות וה-RSW נע בתווך בעל אימפדנס אקוסטי גבוה ופוגש בראש האימפקטור תווך בעל אימפדנס אקוסטי נמוך (האוויר בניקבה). כך נולד גל הריווח.

(8) ניתן לראות כי במגע 1-2 [איור 42(a)] העליה בכוח עקב הגעת ה-RSW מתחברת מיד לירידה עקב ה-TEW.

(9) הירידה עקב ה-TEW מלווה גם כן בתנודות אלה שהפעם הן אחידות יותר ובעלות אמפליטודה התחלתית נמוכה יותר. התנודות אחרי ה-TEW נעות סביב אותו ערך ממוצע כפי שנעו התנודות אחרי ה-TSW, כלומר סביב ערך הכוח הסטטי.

(10) גם עבור ה-TEW ככל שהמגע רחוק יותר מהתחתית ישנן יותר תנודות [איור 42(a)].

(11) נקודה D מציינת את הגעת גל הריווח החוזר מהתחתית (-reflected expansion wave REW). כפי שגל המאמצים שפגע בתחתית הקשיחה (בעלת אימפדנס אקוסטי גבוה יותר) הכפיל את עוצמתו, גם גל הריווח מגדיל את עוצמת הריווח לאחר הפגיעה.

(12) ניתן לראות כי אחרי הגעת ה-REW קשה יותר לראות תנודות באות וגם אלו הנראות באיור 42(c) חלשות מאד.

(13) האות E מציינת את תחילתו של מחזור חדש. גל המאמצים החדש נוצר בראש האימפקטור עקב מפגש בין ה-REW הנע בתווך שבו האימפדנס האקוסטי גבוה יותר מזה שבו הוא פוגש בראש האימפקטור. ניתן לראות כי הפעם העליה איטית יותר מהעליה המקבילה בנקודה A תופעה המסמלת כי האות התרחב במהלך תנועתו.

(14) ניתן לראות כי במגעים הקרובים יותר לראש השרשרת ולמקור היווצרות הגל, הירידה בין נקודות E ו D קצרה יחסית [איור 42(a)], בעוד שבתחתית השרשרת [איור 42(c)] הכוח יורד עד לאפס (ניתוק) וקשה לראות את מיקומה הברור של נקודה E בתחום הזמן הנצפה.

חשוב לשים לב כי במרבית המקרים האותיות המסמנות את הגעת הגלים השונים אינן מצביעות על נקודה מסוימת שם קורה השינוי. זוהי אבחנה חשובה אליה נחזור בעת הניסיון לקבוע את מיקום חזית הגל.

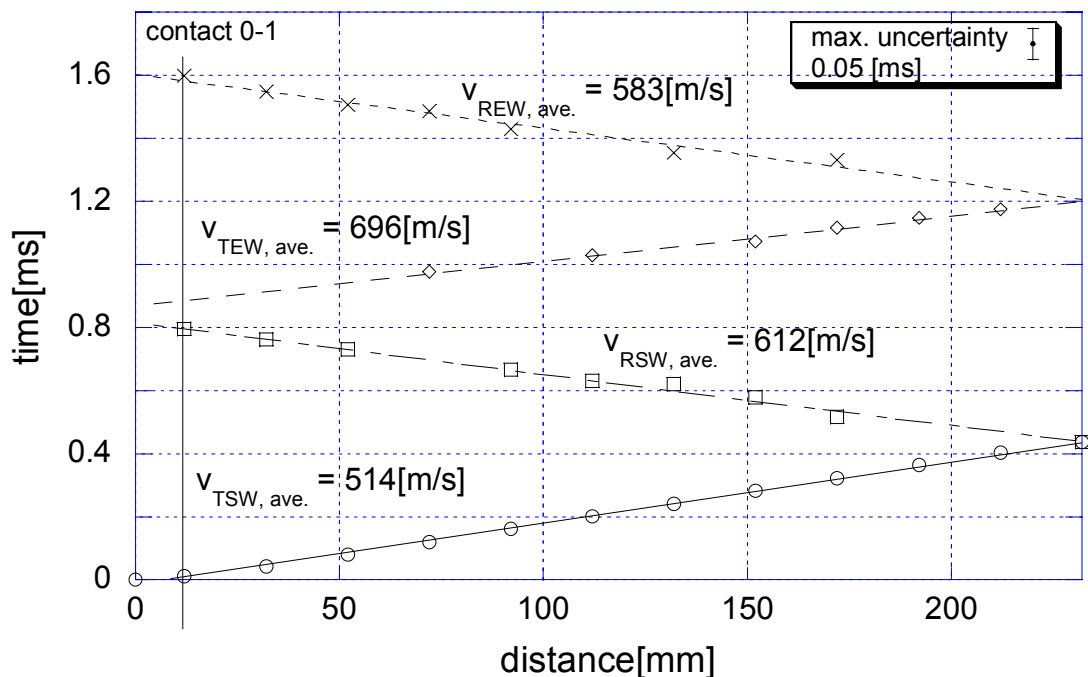
#### 4.1.3 מאפיינים נוספים של התהליך

איור 43 מציג את התקדמות חזית גל המאמצים כתלות בזמן. מעט מוקדם אך חשוב לציין כי התנודות אותן ניתן לראות אחרי הגלים השונים מציינות התפרקות של האות המקורי לאותות קצרים עליה נדבר בהמשך. מכאן נובע שמדידת המהירות המבוצעת אחרי הפירוק מתייחסת רק למהירות האות הראשון. בניית איור זה נתקלה בבעיות הנובעות מהקושי בקביעת הזמן המדויק שבו הגיעה חזית הגל למגעים השונים בין הדיסקות. לאחר מספר ניסיונות גובשה הדרך הבאה. עבור ה-TSW חושב הערך של מספר פס 1/2 מתוך החוק הפוטואלסטי (משוואה 2.2.20):

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{f_\sigma N}{h} = \frac{10130 \cdot 0.5}{0.0095} = 533157 \text{ Pa} = 0.533 \text{ MPa}$$

ערך זה חושב מאחר וגם בניסוי נקבע מיקום חזית הגל לפי הפס הראשון בשדה לבן, שהוא בעל מספר פס, 1/2. ערך זה שנצפה על גרף המאמצים של Tresca קטן בכל המגעים מ 4.5% מהערך הממוצע של אמפליטודת התנודות אחרי מעבר הגל.

מאחר ודרך זו לא ישימה לגלים האחרים, הוחלט כי במקרים אלה יש להוסיף או להחסיר 4% מהערך הממוצע של המאמץ בכל סדרת תנודות ומשמם לקבל את זמן הגעת



איור 43 התקדמות חזית הגל כתלות בזמן

חזית הגל למגע הנבדק. כאשר מדובר בגלי דחיסה הוספו 4% לערך הממוצע ועבור גלי ריווח הוחסרו 4%. חשוב להבין כי בחירה באחוז שונה היתה נותנת תוצאות שונות. ניתן גם לראות מהגרף כי לא עבור כל המגעים ניתן היה לקבוע במדויק את זמן ההגעה של חזית הגל. הערכה שמצוינת בפניה הימנית העליונה קובעת כי אי הודאות המרבית בערך הזמן נעה בתחום של  $\pm 0.05\text{ms}$ .

באיור עצמו ניתן לראות כי ה-TSW המתקדם בשרשרת ללא כל העמסה מוקדמת, נע במהירות נמוכה למדי. ה-RSW שבא אחריו נע בתווך דחוס יותר שבו המגעים קיימים ולכן מהירותו גבוהה ב- $100\text{m/s}$  לעומת ה-TSW. ה-TEW נע בתווך צפוף עוד יותר והמהירות גדלה ב- $80\text{m/s}$  ביחס למהירות ה-TSW. ה-TEW נע למעשה בתווך הדחוס ביותר בהשוואה לגלים האחרים. בתווך כזה שטחי המגע בין הדיסקות כבר מספיק רחבים והמעבר דרכם קל יותר. ניתן גם לראות כי שתי העליות במהירות דומות מאד בגודלן. תופעה זו דומה לעליות במעוותים המנורמלים אחרי אותם גלים, כפי שניתן לראות באיור 46(a). ה-REW נע לתווך צפוף פחות מה-TEW ואכן מהירותו נופלת ביותר מ- $100\text{m/s}$ . מצב המאמצים בשרשרת בזמן התקדמות ה-RSW וה-REW דומה אך קשה לקבוע אם מהירותם צריכה להיות דומה. אין ספק כי מהירויות אלה קרובות יחסית.

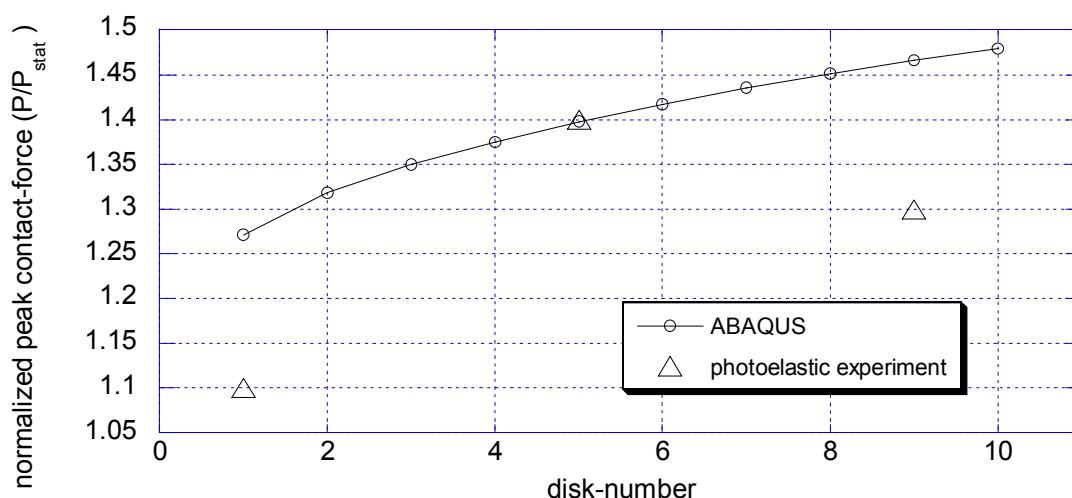
בסך הכל ניתן לראות כי המהירות עולה עם השיפור במגעים ויורדת עם הנסיגה בהם. כלומר, ניתן לומר כי מהירות הגל מושפעת מאד משינויים בקשיחות המגע.

מתוך איור 43 ניתן גם להתרשם כי התקדמות חזית גל המאמצים כמעט ליניארית אולם בכדי לדייק יותר נבדקה המהירות בכל דיסקה בזמן מעבר ה-TSW. נמצא כי בדיסקה הראשונה מהירות גל המאמצים היתה  $625\text{m/s}$  ואילו בדיסקה הרביעית דעכה המהירות לסביבות  $500\text{m/s}$ . מהירות זו כמעט ואינה משתנה בהמשך השרשרת. מכאן שמהירות הגל דועכת בצורה משמעותית תוך מספר דיסקות קטן לערך כמעט אחיד. נציין כי תוצאה דומה מוזכרת גם על ידי Shukla & Damanian (1987) עבור חומר שונה, צורת העמסה שונה ואורך אות אחר. נקדים את המאוחר ונציין כי הירידה במהירות בדיסקות הראשונות נצפית בכל שרשרת ללא קשר לירידה או עליה בכוח המגע המרבי. כנראה שתופעה זו קשורה בסידור האנרגיה של אות הכניסה המתרחש עם תחילת ההתקדמות של האות בשרשרת. סידור זה קשור בצורת המעבר של האות במגעים (חוק המגע) ובצורת המעבר שלו בחומר עצמו (קשיחות, צפיפות).

תופעה אופיינית נוספת מוצגת באיור 44, שם ניתן לראות את השינוי בכוח המגע המרבי אחרי ה-TSW, מנורמל לפי הכוח הסטטי. ניתן לראות כי פרמטר זה עולה בצורה הדרגתית לאורך השרשרת, כאשר בתחילה העליה חריפה יותר ולאחר מכן היא מתמתנת כתלות במספר הדיסקות. זוהי תופעה חשובה מאד שבה מתרחשת הגברה של הכוח במורד

השרשרת לעומת הכוח בכניסה. בהמשך נראה כי עליה זו מתרחשת כאשר אורך אות ההעמסה גדול מאורך האות האופייני של השרשרת (ראה גם סעיף 1.2.1.2.2).

התופעה המעניינת ביותר מתייחסת לשינוי בצורת הגל. כפי שהוצג באיור 42, האות בכל נקודה בתווך הגרגרי מציג תופעה של תנודות בזמן העובר בין הגעת גל אחד למשנהו. אלו הן תנודות בעלות אמפליטודה משמעותית, הקטנה ככל שנתרחק מאזור המגע לכיוון מרכז הדיסקה ולכיוון השפה החופשית שעל הקוטר האופקי. תנודות בנקודת המגע נובעות כנראה מהחזרות מהדפנות החופשיות של הדיסקה ואולי אפילו מנקודת המגע הבאה אולם גם אחרי ניסיון חקירה של המרחקים והמהירויות לא ברור מקורן המדויק. מעניין לראות כי



איור 44 השוואה של השינוי בכוח המגע המרבי אחרי ה-TSW.

משך התנודה (הזמן בין שתי פסגות סמוכות) משתנה, מדיסקה לדיסקה לאורך השרשרת, באותה דיסקה בין גל אחד לשני ואפילו באותה סדרת תנודות. טבלה 3 מציגה סדרת נתונים לגבי משכי התנודות במגע שבין דיסקות 4 ו 5 לאחר הגלים השונים. בנוסף ניתן גם לראות בטבלה זו את התנודות אחרי ה-TSW במגע שבין דיסקות 1 ו 2 ובמגע שבין דיסקות 8 ו 9. נתונים אלה נאספו מאיור 42.

מגע 8-9	מגע 1-2	מגע 4-5			
		REW	TEW	RSW	TSW
TSW	TSW		150	136	116
128	110				110
	108				110
	106				
	106				
	106				

טבלה 3 משכי התנודות ב- $\mu\text{sec}$  אחרי פירוק האות הראשי בנקודות שונות לאורך השרשרת.



- (1) ניתן לראות שבכל סדרת תנודות משך התנודות הראשונות גדול יותר וישנה ירידה במשך התנודה והתכנסות לערך אחיד בהמשך.
  - (2) בתוך אותו מגע ישנו שינוי של משך התנודות אשר אורכו גדל אחרי מעבר כל גל.
  - (3) בין הדיסקות השונות ישנו גידול במשך התנודות אחרי ה-TSW ככל שמתקדמים במורד השרשרת.
  - (4) ניתן גם לראות כי השינוי במשך התנודות בתוך אותה שרשרת תנודות מלווה בדעיכה (attenuation) של עוצמת האות [ראה איור 42 (b) בין נקודה m המסמלת את הכוח המרבי לנקודה B המסמנת את הגעת ה-RSW].
- התנודות הניצפות הן למעשה פירוק של האות המקורי לאותות קצרים יותר כפי שראינו אצל Shukla *et al.* (1993b) (סעיף 1.2.1.2.2) ונראה גם בהמשך. השינוי במשך האותות יכול להיווצר עקב השפעות פיזיקליות ו/או נומריות. יתכן ואף הגיוני כי האותות החדשים שנוצרו אינם זהים מלכתחילה ובנוסף הם עוברים תהליך של שינוי לפני שהם מקבלים את צורתם הסופית איתה ימשיכו להתקדם. תהליך זה יכול להיות קשור בהתרחבות ובדעיכה של כל אות. חשוב גם לציין כי בספרות מצביעים על העובדה שהאותות החדשים נוטים להיפרד תוך כדי תנועתם ובכך ישנה תרומה נוספת לגידול במרחק. גם מבחינה נומרית יתכן כי נקבל שילוב של התרחבות האות עם דעיכתו תוך שהאנרגיה הכללית נשמרת. בדיקת אנרגיה במודל גילתה לנו שישנה אנרגיה המתבזבזת והאנרגיה הכללית אכן פוחתת. בדיקה זו עדיין אינה מספיקה לביסוס תופעה זו או אחרת היות והשרשרת שלפנינו קצרה מאד הפיזור אינו מספיק משמעותי. בהמשך אכן ניווכח כי התהליך שראינו הוא ראשיתו של תהליך רחב יותר.

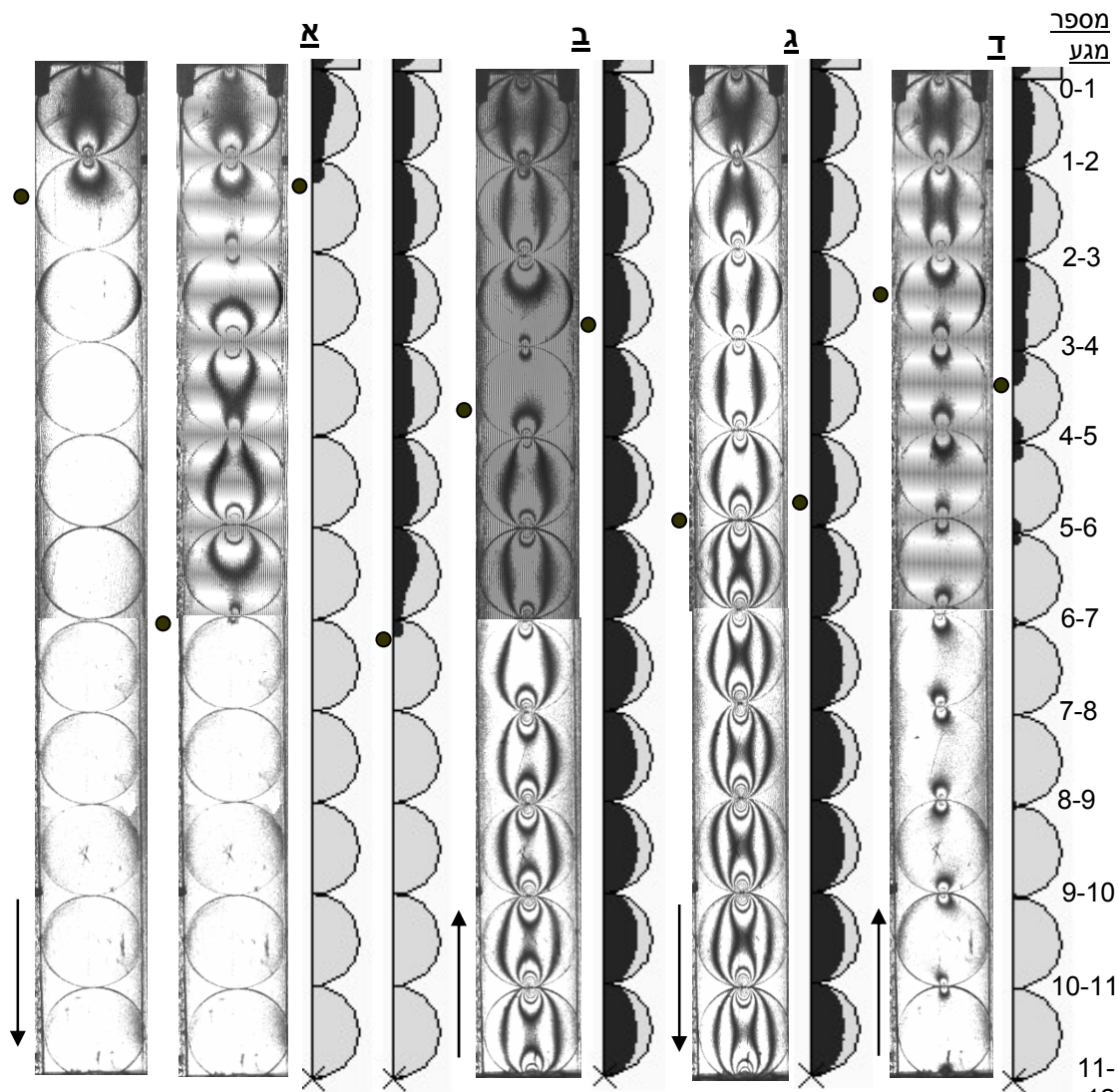
## 4.2 השוואה בין הדמיה לניסוי

### 4.2.1 השוואה כללית

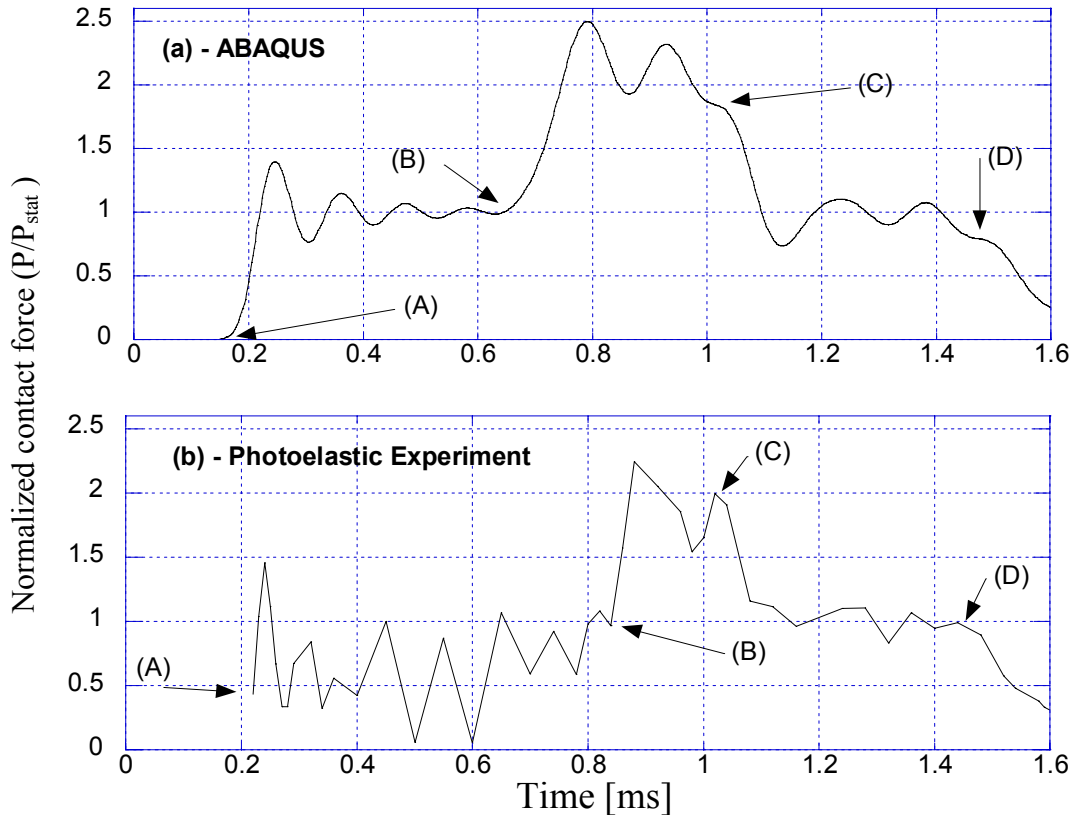
כאמור בסעיף 3.2, טיב המודל הנומרי תחת העמסה דינמית נבדק על ידי השוואה לתוצאות הניסוי שנערך במקביל במעבדה. נזכיר גם כי בסעיף זה הוסבר כי בבסיס ההתאמה בין המודל הנומרי לתוצאות הניסוי הוצבה השאיפה להתקרב בצורה איכותית, עם מספר רב ככל האפשר של פרמטרים לתוצאות הניסוי. תוצאות הניסוי שנערך תוך שימוש בשיטות של פוטואלסטיות ומדידי עיבור מפורטות אצל Glam (2004). מקור זה מציין גם שהשיאה במציאת ערך כוח המגע באמצעות השיטה הפוטואלסטית לא עולה על 14%. מספר מאפיינים היוו בסיס להשוואה זו:

- (1) צורת אות כוח המגע במגעים שונים.
- (2) צורת אות המעוות הנורמלי בנקודות שונות.
- (3) מהירויות הגלים השונים בתהליך.

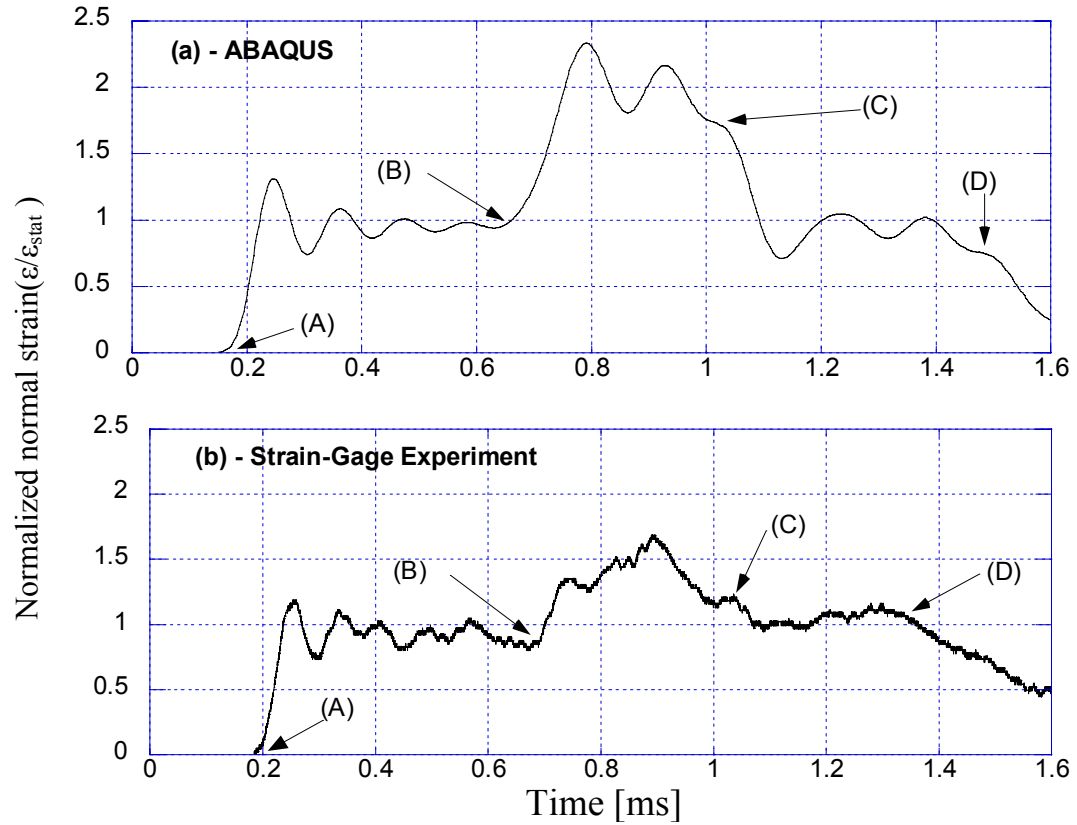
באיור 45 מוצגות מספר תמונות של שרשרת הדיסקות עבור השלבים השונים של תנועת הגלים, כפי שהם נראים בניסוי הפוטואלסטי ובהדמיה. ההדמיה מציגה תמונה של מצב המאמצים לפי Tresca. ההתאמה בין התמונות מההדמיה ומהניסוי קשורה רק בשלב של תנועת הגלים בשרשרת ממנו הן נלקחו. כיוון תנועת הגל מסומנת משמאל לתמונות עליהן הוא מצביע. עבור ההדמיה התצוגה מורכבת משני צבעים בלבד כאשר הצבע הלבן מציין אזורים בהם המאמץ קטן מ-  $0.533\text{MPa}$  והצבע הכהה מציין אזורים בהם המאמץ גבוה מערך זה. כזכור מסעיף 4.1.3 ערך זה שווה לערך הפס הראשון המופיע בתמונות הניסוי ולכן ניתן ללמוד ממנו על מיקום חזית הגל המסומנת בתמונות בנקודה שחורה (משמאל לתמונה). ניכר כי מתמונות ההדמיה קשה יותר לקבוע את מיקום חזית הגל בזמן מעבר ה-RSW ו ה-TEW ולכן זהו מיקום משוער בלבד.



איור 45 תמונות נבחרות מתוך ניסוי והדמיה (א) TSW (ב) RSW (ג) TEW (ד) REW.



איור 46 השוואת כוח המגע בין ניסוי פוטואלסטי והדמיה במגע 4-5.



איור 47 השוואת ערך המעוות בין ניסוי והדמיה במרחק 1.5mm מתחת למגע 4-5.

באיור 46 מוצגת השוואה של צורת אות כוח המגע המנורמל במגע בין דיסקות 4 ו 5, בין ההדמיה [איור 46(a)] לניסוי [איור 46(b)]. הנרמול בוצע לפי ערך הכוח הסטטי כפי שחושב בסעיף 4.1.1. היות ומדובר בערך נרמול זהה לניסוי ולהדמיה, ניתן להסיק מאיור זה גם לגבי השוואה כמותית.

ניתן לראות כי צורתם הכללית של האותות דומה מאד. כך לגבי זמן הגעת ה-TSW (נקודה A), כוח המגע המרבי אחרי ה-TSW, זמן הגעת ה-TEW וה-REW, צורת האותות אחרי ה-RSW ואחרי ה-TEW ועוד. שלושה הבדלים בולטים לעין בהשוואה:

(1) האותות החדשים שנוצרו בניסוי עקב הפירוק אחרי ה-TSW, רבים יותר, בעלי אמפליטודה גדולה יותר ואחידה יותר וללא מגמת הדעיכה הניכרת בהדמיה. ישנם מצבים של שחרור כמעט מלא של הכוח במגע.

(2) הערך הממוצע של האותות אחרי ה-TSW בניסוי נמוך מזה שבהדמיה, למרות שאחרי ה-TEW הערך הממוצע בניסוי ובהדמיה נראה דומה.

(3) הגעתו של ה-RSW (נקודה B) בהדמיה מהירה בהרבה לעומת הניסוי. באיור 47 ניתן לראות השוואה נוספת אלה שהפעם מדובר במעוות מנורמל. מעוות זה נמדד בניסוי על ידי מדיד עיבור שהודבק במרחק אנכי של 1.5mm מהמגע (המרחק נקבע על מנת להתרחק מהגרדיאנטים החזקים הקיימים באזור המגע). בהדמיה נלקח המעוות מאלמנט המצוי במרחק זה מהמגע. הנרמול בוצע על פי הערך אליו התכנס המדיד במצב סטטי בניסוי ( $1600\mu\text{strain}$ ) ועל פי הערך שהתקבל במודל תחת העמסה סטטית בהדמיה ( $670\mu\text{strain}$ ). גם הפעם ניתן לראות דמיון רב בצורה הכללית של האות, זמן הגעת ה-TSW, צורת האותות אחרי ה-TSW, זמן הגעת ה-RSW ועוד. ההבדלים הבולטים בין שני האיורים הם:

- (1) צורת האותות אחרי ה-RSW כולל ערך מרבי הנמוך הרבה יותר בניסוי.
- (2) צורת האותות אחרי ה-TEW, כאשר בניסוי כבר כמעט לא ניתן להבחין בהן.
- (3) צורת ירידת האות אחרי ה-REW כאשר, בהדמיה האות ממשיך בירידה אחרי 1.6ms [כפי שניתן לראות באיור 42(b)] בעוד בניסוי הירידה איטית יותר ונפסקת אחרי 1.6ms.
- (4) נציין גם כי בבחינת אות הניסוי לאורך זמן רב יותר נמצא כי הוא מתכנס לערך יציב סטטי אחרי כ- 5ms בעוד בהדמיה ממשיך האות להשתנות גם בזמן זה. תופעה זו מצביעה על מחסור בריסון מסוג כלשהו בהדמיה.

לאחר שנבחנה צורת האותות נביט בהשוואה בין המהירויות הממוצעות של הגלים

המוצגות בטבלה 4.

סוג הגל	מהירות מניסוי [m/s]	מהירות מהדמיה [m/s]
TSW	431	513
RSW	698	612
TEW	710	696
REW	667	583

טבלה 4 המהירות הממוצעת של הגלים בשלבים שונים של התנועה.

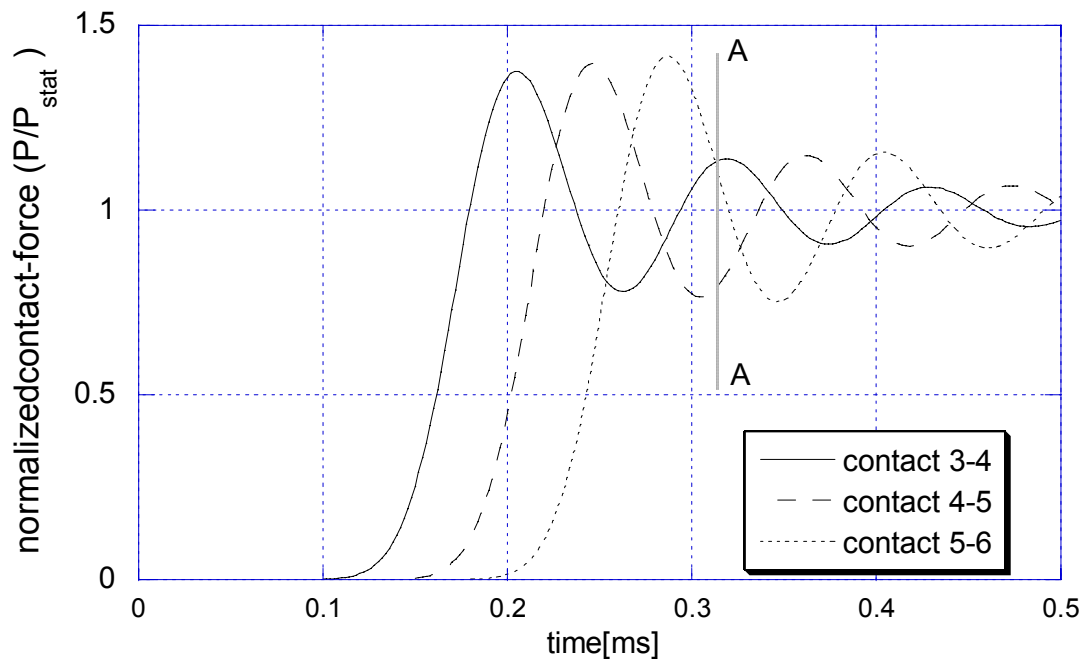
(1) ניתן לראות כי בניסוי, העליה בין מהירות ה-TSW למהירות ה-RSW משמעותית הרבה יותר מאשר בהדמיה.

(2) עבור מהירות ה-TEW הערכים בניסוי ובהדמיה דומים מאד ומצויים בטווח שגיאה אפשרי האחד מהשני.

(3) הירידה במהירות ה-REW בהדמיה משמעותית ביחס לירידה בניסוי. בסך הכל ניתן לראות כי מדובר באותה צורת שינוי כללית במהירויות הגלים ובאותו סדר גודל של מהירויות.

קעת נחזור ונביט באיור 44 שם מוצגת השוואה של כוח המגע המרבי אחרי ה-TSW, מנורמל לפי הכוח הסטטי. ניתן לראות כי לעומת העליה הרציפה בכל המגעים בהדמיה הרי בניסוי, מתחילה ירידה כבר אחרי הדיסקה הרביעית.

התבוננות נוספת בתוצאות הניסוי המתוארות באיור 45 (א) מראה שלאורך השרשרת נוצר מצב שבו במגע אחד יש מאמץ גבוה, במגע שאחריו המאמץ כבר ירד ובמגע הבא אחריו



איור 48 אותות כוח המגע בשלושה מגעים עוקבים.

המאמץ גבוה פעם נוספת. בתופעה זו הקשורה בפירוק האות המרכזי לאותות קצרים יותר קשה להבחין בעובדה זו מהתבוננות בתמונה מההדמיה ולכן מוצגים באיור 48 אותות כוח מגע עבור שלושה מגעים עוקבים כפי שהתקבלו מההדמיה. הפס A-A מסמן נקודה בזמן בה ניתן לראות כי במגע 5-6 הכוח גבוה, במגע 4-5 הכוח נמוך ובמגע 3-4 הכוח גבוה פעם נוספת. כלומר, התופעה הנצפית בניסוי מופיעה בצורה חלשה יותר גם בהדמיה. ניתן להמשיך לאורך השרשרת ולגלות נקודות זמן נוספות בהן התופעה חוזרת על עצמה.

#### 4.2.2 סיבות אפשריות להבדלים בין ההדמיה לניסוי

ראשית נחזור ונזכיר כי אי ידיעת תנאי השפה (הקוטר המדויק של הדיסקות, טיב פני השטח שלהן והמרווחים ביניהן) המדויקים הקיימים בין הדיסקות בניסוי הביאה להתאמה כללית של המקדמים (מקדם הקשיחות וריסון המגע) בהדמיה זו. בנוסף נזכיר כי בתיאור מערכת הניסוי (סעיף 3.1) מוזכרת העובדה כי עבור הליך העמסה דינמי ניתן לצלם תמונה אחת בלבד בכל ניסוי. אמנם בניקבת ההלם מדובר על הדירות התנאים עם סטיה שאינה עולה אחוז אחד אך תמיד חשוב לזכור כי יתכן הבדל בין ניסוי אחד למשנהו. בשלב הבא נתייחס לנקודות המחלוקת השונות באופן פרטני.

לגבי הגעתו המוקדמת של ה-RSW בהדמיה שהוזכרה בקשר איור 46. ניתן לראות כי בבדיקה שנערכה באמצעות מדידי העיבור ומוצגת איור 47, ישנה הסכמה לגבי זמן הגעת ה-RSW בין הניסוי וההדמיה. יתכן כי במקרה זה פרשנות גרף הניסוי בעייתית במקצת היות וגם בתמונות הניסוי וגם באיור מתוך הניסוי המציג את מיקום חזית הגל כתלות בזמן, ניכר כי הגעת ה-RSW מוקדמת יותר. חשוב לציין כי גם בניסוי, קביעת מיקום חזית הגל מתוך התמונות עבור הגלים הנעים בשרשרת הדחוסה (RSW, TEW, REW) אינה ודאית.

הבדלים באמפליטודת אות המעוותים המנורמל מוזכרים בהתייחסות לאיור 47. נציין כי בניסוי מודגש שרגישות מדידת המעוותים קטנה עקב זמן התגובה הארוך יחסית של המגבר וכן מצוין כי אין ודאות לגבי הערכים המוחלטים עקב אי-ודאות בכיוון הצבת מדיד העיבור. מכאן שללא כיוול מתאים ניתן להתייחס רק לערכים מנורמלים מהניסוי וגם אליהם בזהירות. הבדל נוסף המוזכר בהתייחסות לאיור 44 נוגע לכוח המגע המרבי אחרי ה-TSW. חשוב להבחין כי במקרה זה ישנן רק שלוש נקודות מהניסוי וההפרש בין השניה לשלישית נופל בטווח השגיאה כפי שמצוין בניסוי. ניתן גם להוסיף כי בניסוי של 22 דיסקות אובחנה עליה עד המגע בין דיסקות 11 ו 12 לפחות. מכאן שיש להתייחס לתוצאות הניסוי במקרה זה בספקנות.

כמובן, שכל הסיבות האפשריות המובאות למעלה מתייחסות למודל הנומרי הקיים ואין שום מניעה שמודל זה אינו מושלם וחסרים בו מנגנונים כאלה או אחרים שהם הסיבה להבדלים הנצפים.

### 4.2.3 סיכום ההשוואה בין הניסוי וההדמיה.

נראה כי בנוגע למהירויות הממוצעות של הגלים ולכוח המגע הממוצע אחרי מעבר הגלים, האות המתקבל מההדמיה דומה מבחינה איכותית לאות המתקבל מהניסוי. מספר תופעות עיקריות שלא התקבלו בהדמיה מוזכרות ביחס לאיור 46. תופעה אחת היא הערך הממוצע הנמוך של כוח המגע אחרי ה-TSW, באות הניסוי. ערך זה נמוך ביחס לכוח בכניסה למערכת וחשוב גם לשים לב כי הבדל זה גם קיים ביחס לתוצאות ממדידת מדידי העיבור כפי שנראה באיור 46 (b) ואיור 47 (b). תופעה זו גם לא נצפתה בניסויים פוטואלסטיים אחרים ולא נמצא לה הסבר מספק. תופעה שניה היא ריבוי האותות החדשים אחרי מעבר ה-TSW והאמפליטודה הגדולה והיחסית אחידה שלהם (יחסית להדמיה). לגבי אמפליטודת האותות לא נצפו בספרות אותות היורדים כה נמוך עד כמעט שחרור מוחלט של הכוח במגע בשלב כה מוקדם של התקדמות האותות בשרשרת. יש הגיון בפירוק של האות לאותות דומים וקצרים יותר אך ברוב המקרים שניצפו בספרות היה הפירוק לאותות חדשים בהם הפסגות יורדות בהדרגה [איור 22(א)]. חשוב לציין כי עם זאת לא ניצפו ניסויים עם אות כניסה הדומה לזה בו נעשה שימוש בניסוי ולכן ניתן לומר כי לא נמצאה דרך לקבל תוצאות דומות בהדמיה.

לגבי ריבוי התנודות נתייחס לעניין בהרחבה ונציג את ההשוואה על פי הפרמטר של משך התנודה. ניתוח איור 46 מלמד כי ההדמיה מספקת במגע 4-5 משך תנודה ממוצע של 0.11ms אחרי ה-TSW לעומת 0.07ms בניסוי. בדיקה נוספת מלמדת כי עלית משך התנודה הממוצע אחרי ה-TSW, בין מגע 1-2 למגע 8-9 היא כ- 15μs בניסוי לעומת כ- 20μs בהדמיה. הפרש זה אינו משמעותי אך הוא בהחלט יכול לרמז על פיזור חזק יותר בהדמיה. מכאן שמגמת הפיזור, הנצפית בתנודות שאחרי ה-TSW, לאורך השרשרת מתקבלת בהדמיה בצורה מקורבת אך לא משך הזמן המוחלט שלהן. כאמור בסעיף 3.2 משך הזמן של התנודות מושפע מאד מקשיחות המגע והוא קטן עם הגידול בקשיחות. יש בכך לרמז כי הקשיחות שנבחרה ומשמשת בצורה טובה לקבלת המהירויות השונות אולי אינה מתאימה לתיאור מלא של התופעה.

בהקשר לתופעה האחרונה נסיף כי מאחר ומשך התנודה והמהירות הממוצעת בהדמיה גדולים מאלה שבניסוי הרי גם אורך הגל המתקבל ממכפלת גורמים אלה יהיה גדול יותר. לסיכום ניתן להגיד שמודל זה טוב לתיאור איכותי של הניסוי אך אינו מצליח לתאר באופן מלא ובאופן כמותי את כל התופעות. יש צורך בבחינה עמוקה יותר של מנגנוני הריסון ובהגדרה טובה יותר של תנאי השפה בכדי לכון את המקדמים של המנגנונים השונים המרכיבים את המודל.

מאחר ומודל זה משמש גם בהמשך העבודה יש להתייחס לתוצאות הנומטריות הכמותיות באשר הן מוצגות בחשדנות מכובדת.

### 4.3 ניסוי והדמיה של העמסה דינמית על שרשרת ישרה יחידה בת 11 דיסקות תחת עומס סטטי מוקדם.

כאמור בסעיף 3.2 תנאי השפה במגעים בין הדיסקות (הקוטר המדויק של הדיסקות, טיב פני השטח שלהן והמרווחים ביניהן) לא היו ברורים מהאופן בו בוצע הניסוי בפעם הראשונה. עובדה זו גם גרמה לכך, שקביעת המקדמים השונים במודל הנומרי נעשתה באופן מקורב בלבד. נוכחנו כי מבין המאפיינים המשפיעים על תנאי השפה הקל ביותר לשינוי הוא המרווחים בין הדיסקות ולשם כך יש להפעיל העמסה סטטית מוקדמת על השרשרת. העמסה זו תאפשר לנו לדעת בודאות כי יש מגע בין הדיסקות בעת ההעמסה הדינמית. ניסוי שמטרתו לבדוק כיצד תשפיע העמסה סטטית מוקדמת על מהלך הגלים בשרשרת תחת העמסה דינמית מוצג בסעיף זה. במסגרת ניסוי זה התרכזנו בבדיקה איכותית של השפעת המצב בו קיים מגע הדוק בין הדיסקות על השינוי במהירות הגל הראשוני (TSW). הגודל של ההעמסה הסטטית שונה מספר פעמים בכדי לבחון מספר תופעות, תחת איזה עומס סטטי מוקדם מתרחש שינוי של המהירות הממוצעת של הגל, איך משתנה מהירות הגל עם הגידול בעומס הסטטי המוקדם והאם ניתן לראות שינוי בתופעה הכללית עם העליה בעומס הסטטי המוקדם.

נזכיר כי מצב של עומס מוקדם ניצפה גם בעת העמסת שרשרת חופשית כאשר, ה-TSW יוצר לחץ התחלתי במגעים והגלים הנעים אחריו עושים זאת בתווך דחוס. בנוסף חשוב להזכיר כי שימוש במצב של העמסה סטטית מוקדמת ניצפה גם בעבודות שונות בספרות כפי שניתן לראות באיור 12 על ידי הנקודות השחורות במגעים שלפני חזית הגל.

#### 4.3.1 מהלך הניסוי

גיאומטרית המודל שונתה מעט בניסוי זה ונעשה שימוש ב-10 דיסקות כשמעליהן אימפקטור באורך 27mm. כמתואר בסעיף 3.1 ניקבת ההלם היא כלי נוח מאד ליצירת לחץ סטטי התחלתי בתא הניסוי. על ידי העלאת הלחץ בתא הלחץ הנמוך, המצוי מעל לתא הניסוי, ניתן לווסת בדיוק את הלחץ הרצוי.

בסדרת ניסויים זו נערכו ארבעה ניסויים עם העמסה מוקדמת שונה. בכדי לשמור על יחס בין ההעמסות בניסויים השונים, נקבע שמהירות גל ההלם בנקבה תישאר קבועה בכל הניסויים (465m/s). בכדי לבדוק את מהירות ה-TSW צולמה שרשרת הדיסקות בכל ניסוי בהשהייה של 0.231ms ומצב כוחות המגע נחקר בנקודת זמן זו. עבור כל העמסה סטטית נערכו חמישה עד שישה ניסויים בכדי לאשר את התוצאות. נתוני הניסוי מפורטים בטבלה 5. כאמור בסעיף 4.2.1 חישוב השגיאה במדידת ערך הכוח בעת שימוש בשיטה הפוטואלסטית לא עולה על 14% כמפורט אצל (Glam 2004).

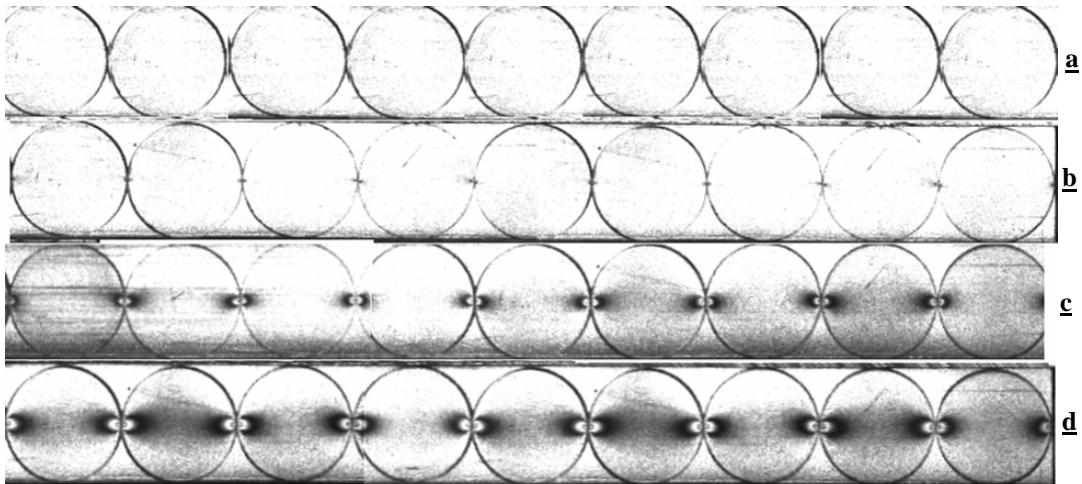


מספר הניסוי	לחץ בתא הלחץ הנמוך [bar]	לחץ סטטי מוקדם [bar]	הכוח הסטטי המחושב במגעים עקב העמסה הסטטית [N]	לחץ ההעמסה הדינמית על תא הניסוי אחרי הגל המוחזר [bar]	הכוח הסטטי המחושב על תא הניסוי עבור לחץ ההעמסה הדינמית [N]
1	1	0	0	3.75	71.25
2	1.1	0.1	1.9	4.1	77.9
3	1.6	0.6	11.4	5.975	113.5
4	2	1	19	7.5	142.5

טבלה 5 נתוני ניסוי עבור העמסה דינמית של שרשרת ישרה יחידה בת 10 דיסקות תחת לחץ סטטי מוקדם (מספר מאך בנקבה  $M=1.367$ )

#### 4.3.2 תוצאות הניסוי

איור 49 מציג את תמונת שרשרת הדיסקות עבור ארבעת הניסויים אחרי ההעמסה הסטטית. כצפוי ניתן לראות כי ככל שהלחץ ההתחלתי גדול יותר המאמצים במגעים גדולים יותר.

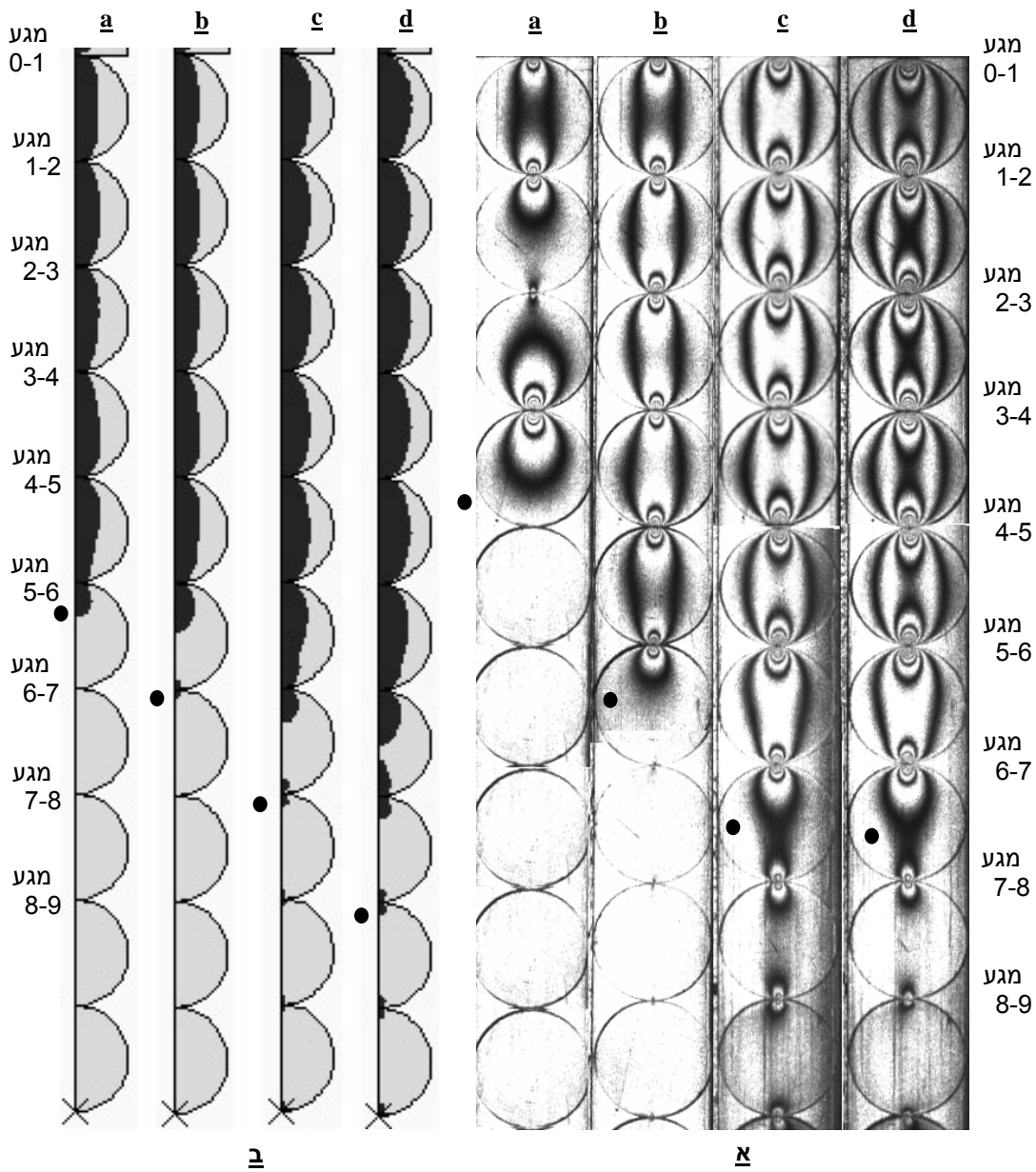


איור 49 ניסוי- תמונת השרשראות אחרי העמסה סטטית של (a) שרשרת חופשית (b) 0.1bar (c) 0.6bar (d) 1bar

איור 50 מציג את תמונת השרשרת לאחר ההעמסה הדינמית בארבעת הניסויים השונים, כאשר נקודות שחורות מציינות את מיקום חזית הגל. ניתן להבחין במספר נקודות: (1) בתחתית השרשרת ניתן לראות בכל המקרים כי מצב המאמצים שנוצר עקב ההעמסה

הסטטית לא השתנה. כלומר, בעת הצילום חזית גל המאמצים לא הגיעה עדיין לנקודות המגע שבתחתית השרשרת.

(2) מתוך מיקום חזית הגל ניתן לראות כי ישנה עליה במהירות גל המאמצים בשרשרת תחת העמסה סטטית מוקדמת לעומת שרשרת חופשית. נראה כי עליה זו נמשכת בעת הפעלת הלחץ המוקדם ועבור העליה בלחץ המוקדם מ-0.1bar ל-0.6bar. המיקום הדומה של חזית הגל עבור לחץ מוקדם של 0.6bar ו-1bar מסמן את היחלשותה של העליה במהירות הגל עבור העלאת הלחץ המוקדם מעל 0.6bar.

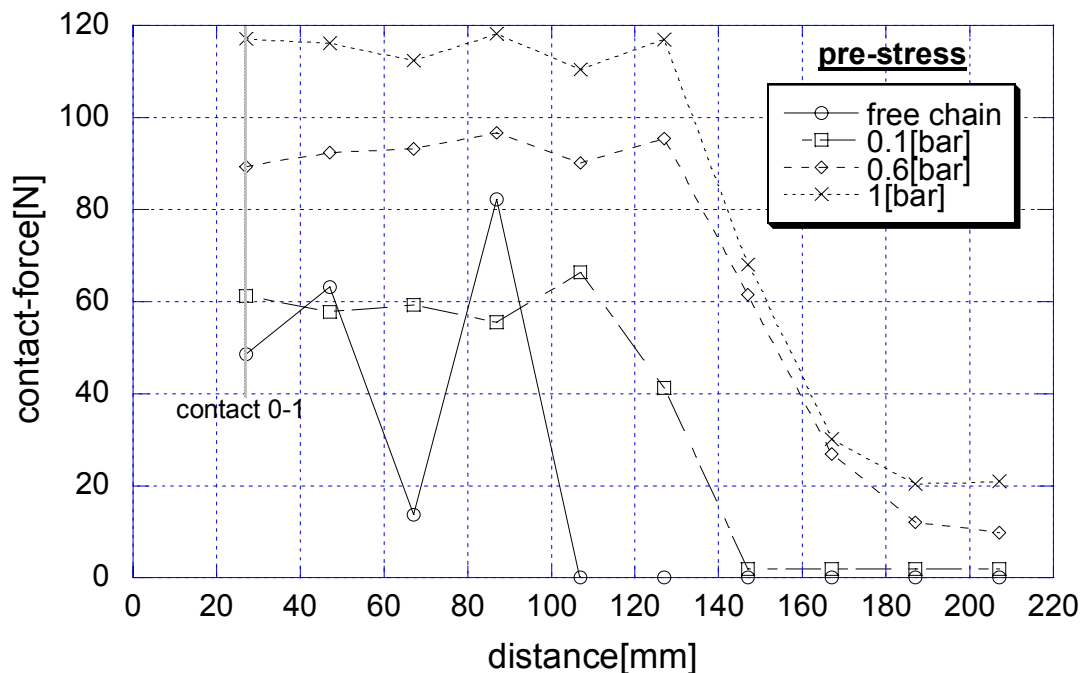


איור 50 תמונת השרשראות אחרי העמסה דינמית (א) ניסוי-0.231ms (ב) הדמיה-0.278ms.

(a) שרשרת חופשית (b) 0.1bar (c) 0.6bar (d) 1bar

3) מצב המאמצים בדיסקות שאחרי חזית גל המאמצים בשרשראות תחת העמסה סטטית מוקדמת, הינו אחיד בהשוואה למצב המאמצים אחרי חזית הגל בשרשרת חופשית. נראה כי כל עומס קטן המתחיל בסגירת המגעים יגרור תופעה זו.

בכדי לחזק את התוצאות הויזואליות, מוצגות באיור 51 תוצאות של כוח המגע במגעים השונים כפי שהתקבלו מהתמונות הפוטואלסטיות. חשוב להדגיש כי האיור מציג רק את כוח המגע במגעים השונים והקווים רק מחברים בין הנקודות אך אינם מציינים את הכוח בינהן. אחידות הכוח במגעים המוצגת באיור זה בהשוואה בין שרשרת חופשית ושרשראות עם עומס מוקדם, שקולה לאחידות מצב המאמצים שהוזכרה בהקשר לתמונות למעלה. גם הדימיון בצורת פילוג הכוחות בשרשראות תחת עומס של 0.6bar ושל 1bar מודגש היטב באיור זה. בהשוואה בין ערכי הכוח הצפויים אחרי ההעמסה הדינמית ומצוינים בטבלה 5 ובין



איור 51 ניסוי - כוח מגע מרבי במגעים השונים לאורך השרשרת אחרי 0.231ms מרגע הפעלת הלחץ (הקווים אינם מציינים כוח אלה מחברים בין הנקודות).

הכוחות המופיעים באיור 51, ניתן להבחין כי כמו בניסוי עם השרשרת החופשית, גם כאן השיטה הפוטואלסטית נותנת ערכי כוח נמוכים מהמצופה אחרי ה-TSW.

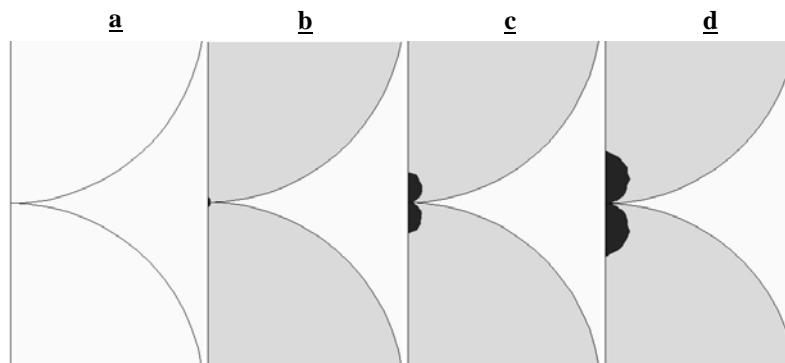
לסיום, נמדד מיקום חזית הגל מהתמונות. תוצאה זו שימשה לחישוב המהירויות הממוצעות של הגלים המוצגות בטבלה 6. ניתן לראות כי ראשית ישנה עליה במהירות ביחס לשרשרת ללא עומס מוקדם. אולם עבור שרשראות תחת עומס מוקדם של 0.6bar ושל 1bar המהירויות המתקבלות דומות מאד ונראה כאילו ישנה התכנסות של ערך המהירות. ניתן לחשוב על התכנסות ערך המהירות במצב שבו המגעים מספיק סגורים עקב ההעמסה הסטטית כך שלאות המתקדם אחרי ההעמסה הדינמית אין מכשולים בדרכו.

מהירות מהדמיה [m/s]	מהירות מניסוי [m/s]	עומס מוקדם [bar]
481	485	שרשרת חופשית
534	644	0.1
608	820	0.6
681	818	1

טבלה 6 השוואת מהירויות ממוצעות של אות המתקדם בשרשרת תחת עומס סטטי מוקדם.

### 4.3.3 תוצאות ההדמיה והשוואה לניסוי

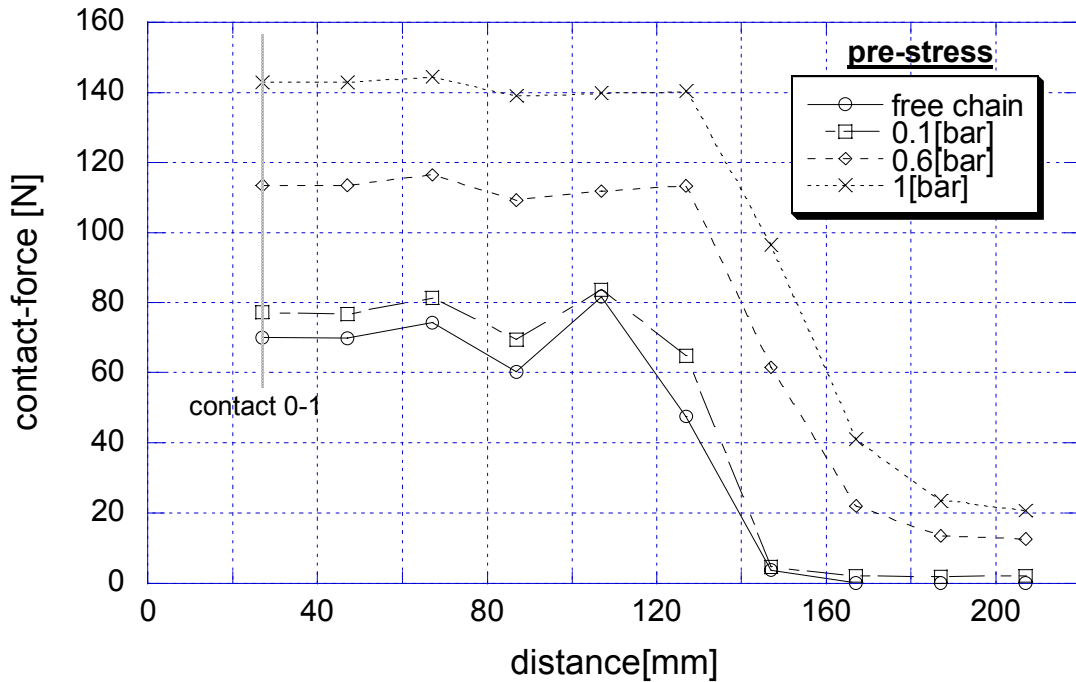
ביצוע הדמיה הכוללת שלב העמסה סטטי ושלב העמסה דינמי היא נוהל מעט יותר מסובך בתוכנה. הסיבה לכך היא ששיטת הפתרון שונה בכל שלב ויש צורך להעביר תוצאות (import) בין השלבים השונים. העברת התוצאות מסובכת מעט יותר במקרה זה היות



איור 52 הדמיה- תמונת אחד המגעים אחרי העמסה סטטית מוקדמת (a) שרשרת חופשית (b) 0.1bar (c) 1bar (d) 0.6bar

ואלגוריתם המגע בו נעשה שימוש מאפשר חדירה בין הגופים. חדירה זו יש לסדר בתחילת כל שלב. המודל הסימטרי נבנה לפי הגיאומטריה שהתקבלה מהניסוי (סעיף 4.3.1). קשיחות המגעים לא שונתה בין ההדמיות השונות. כוחות המגע שהתקבלו בשלב ההעמסה הסטטית התאימו במדויק לכוחות המחושבים (טבלה 5) ותמונה של המגעים אחרי ההעמסה הסטטית מוצגת באיור 52. תמונת השרשראות מההדמיה בשלב ההעמסה הדינמית מוצגת באיור 50 (ב) עבור פילוג מאמצים לפי Tresca. הכוחות במגעים מוצגים באיור 53 עבור זמן של 0.278ms אחרי הפעלת הלחץ. זמן זה נבחר כך שמספר המגעים בהם עברה חזית הגל בהדמיה עם עומס מוקדם ובהם הכוח גם הגיע לערך כמעט אחיד יהיה כמו בניסוי. ההבדל בזמני הצגת התוצאות בין ההדמיה והניסוי (עבור מצב דומה בשרשרת) יכול לרמוז על הבדל בתגובת השרשרת לעומס המוקדם בהדמיה לעומת הניסוי. נזכיר כי גם במקרה זה הקווים בין הנקודות באיור 53, אינם מציינים את הכוח בין הנקודות אלא רק קושרים בין נקודות מאותה הדמיה. תוצאות ההדמיה מוצגות בליווי השוואה לתוצאות הניסוי:

(1) גם בתמונה [איור 50 (ב)] וגם באיור 53 ניתן לראות כי כמו בניסוי גם בהדמיה, הכוח במגעים שלפני חזית הגל הוא הכוח שנוצר עקב ההעמסה הסטטית. עבור הדמיה עם עומס



איור 53 הדמיה - כוח מגע מרבי במגעים השונים לאורך השרשרת אחרי 0.278ms מרגע הפעלת הלחץ (הקווים אינם מציינים כוח אלה מחברים בין הנקודות).

מוקדם של 0.1bar, לא ניתן לראות בזמן ההעמסה הדינמית את סימני ההעמסה הסטטית בתמונות המגעים שלפני חזית הגל. הסיבה לכך היא שהעומס ההתחלתי יצר מאמץ נמוך מאד ויכולת ההפרדה (רזולוציה) בתמונה הנוכחית אינה מאפשרת להבחין בו. ניתן לראות כי המאמץ הנמוך עבור עומס זה משתקף היטב בתמונות ההדמיה וגם בתמונות הניסוי, שאחרי ההעמסה הסטטית.

(2) בכל המקרים ערכי כוח המגע המתקבלים בהדמיה גבוהים יותר מאלו המתקבלים בניסוי. הערכים המתקבלים בהדמיה תואמים גם לחישוב הכוח על פי הלחץ המופעל על השטח הנתון. תופעה זו של ערכים נמוכים המתקבלים מהניסוי הפוטואלסטי נצפתה גם אצל (2004) Glam כפי שצוין בסעיף 4.2.3.

(3) פילוג הכוח במגעים השונים שאחרי חזית הגל, בשרשרת תחת העמסה סטטית מוקדמת של 0.6bar ו 1bar, אחיד יותר מזה שבשרשרת חופשית גם בהדמיה וגם בניסוי. עבור הדמיה של שרשרת תחת עומס סטטי מוקדם של 0.1bar ניכר כי פילוג הכוח במגעים השונים דומה יותר לפילוג בשרשרת חופשית. תופעה זו שונה מהניסוי, שם תחת עומס סטטי מוקדם של 0.1bar, פילוג כוח המגע אחיד יותר מזה שבשרשרת החופשית ודומה לפילוג תחת העומסים הגבוהים יותר. מעניין לשים לב כי ההבדל או הדמיון לשרשרת החופשית ברורים יותר בניסוי שם התנודות הגדולות בפילוג כוח המגע בשרשרת החופשית בולטות יותר. אם כך היה המצב גם בהדמיה אולי היינו אומרים שפילוג כוח המגע תחת עומס מוקדם של 0.1bar אחיד יותר מזה שבשרשרת החופשית.

(4) כאמור בסעיף הקודם, בהדמיה ישנו דמיון בפילוג כוחות המגע בשרשרת תחת עומס מוקדם של 0.1bar ובשרשרת החופשית, לעומת הבדל בפילוג זה הקיים בניסוי. מכאן, שהשרשרת בניסוי רגישה יותר לעומס מוקדם ולכן המעבר לפילוג כוח אחיד מתרחש תחת עומס מוקדם נמוך יותר.

(5) מספר המגעים בהם עברה חזית הגל דומה עבור השרשראות תחת עומס מוקדם בניסוי ובהדמיה.

(6) בהדמיה ישנו הבדל ברור במיקום חזית הגל בין שרשרת תחת עומס מוקדם של 0.6bar ובשרשרת תחת עומס מוקדם של 1bar. הבדל זה ניכר היטב במהירות הממוצעת עליה נדון בהמשך.

ההשוואה בין המהירויות הממוצעות המוצגת בטבלה 6 מצביעה על מספר נקודות. תחת עומס מוקדם המהירויות בהדמיה נמוכות יותר מבניסוי. ניתן לראות כי גם בהדמיה ישנה עליה בערך המהירות ביחס לזו שבשרשרת החופשית, אך תופעת ההתכנסות בערך המהירות אינה מתקבלת בהדמיה, שם ממשיכה המהירות לעלות בהדרגה. נראה כי אי-התאמה זו קשורה בקושי שצוין בהתאמת משטחי המגע בין הדיסקות בתחילת השלב הדינמי, כאשר מדובר בקשיחות מגע נמוכה ובאלגוריתם המאפשר חפיפה. נציין כי בהדמיה שבוצעה תוך שימוש בקשיחות מגע גבוהה יותר אכן נצפה דמיון רב יותר במיקום חזית הגל עבור שני העומסים עליהם מדובר. יתכן ויש בתוצאה זו לרמז על בעייתיות מסוימת בערך קשיחות המגע שנבחר בהדמיה.

בל נשכח שבנוסף לבעיות הקשורות בתוכנה תתכן גם שגיאה בניתוח תוצאות הניסוי כפי שכבר ראינו אצל (2004) Glam.

#### 4.3.4 סיכום

ראינו באופן ניסויי ובעזרת הדמיה נומרית כי עומס סטטי מוקדם המופעל על שרשרת דיסקות, הנתונה בהמשך להעמסה דינמית, גורר עליה במהירות הממוצעת של גל המאמצים המתקדם בשרשרת. התוצאה מדגימה את חשיבות מצב המגעים להתקדמות האות בשרשרת ובנוסף היא מאשרת פעם נוספת כי ללא ידיעת תנאי השפה בין הדיסקות קשה לכייל הדמיה נומרית של המבנה. הניסוי גם הראה כי בתחילה המהירות עולה עד לערך כלשהו ואז עם עליה נוספת בערך העומס המוקדם יש לה נטיה להתכנס לאותו ערך. יתכן כי ערך זה מציין את המהירות המרבית האפשרית בשרשרת זו. עבור קשיחות מגע רכה במודל הנומרי קשה לדמות את נטית המהירות להתכנס כפי שהוצגה בניסוי. לסיום ראינו בניסוי ובהדמיה כי עומס סטטי מוקדם יוצר שדה מאמצים אחיד אחרי חזית הגל המתקדם בעת ההעמסה הדינמית. בתנאים הקיימים במודל הנומרי נראה שהשרשרת בניסוי רגישה יותר לעומס סטטי מוקדם בכל הנוגע לאחידות במצב המאמצים אחרי חזית הגל.

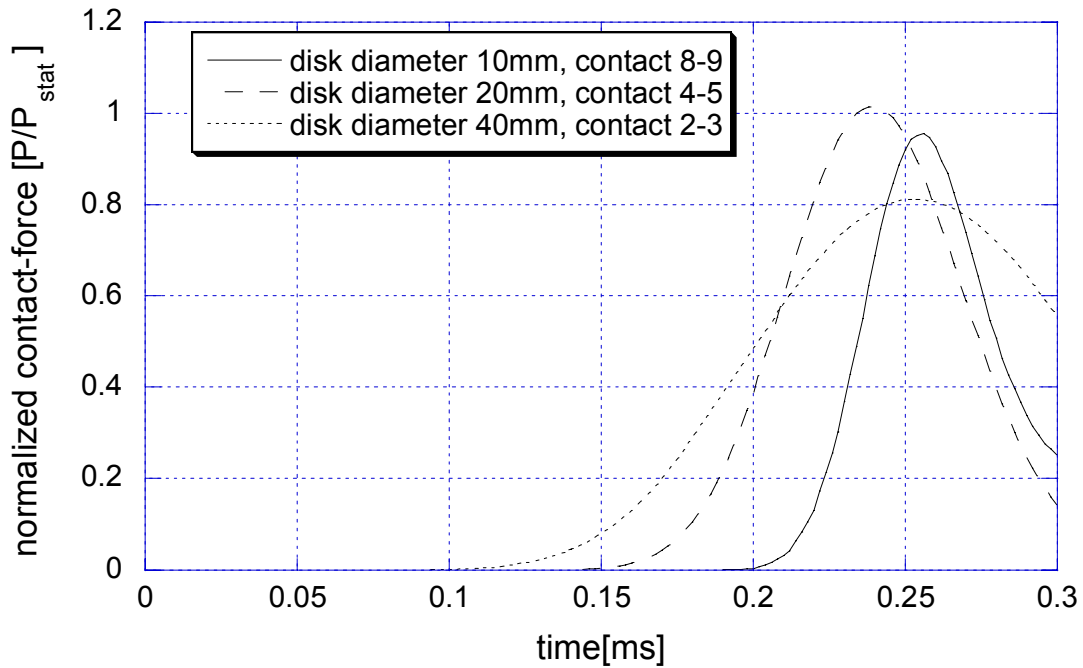
#### 4.4 בדיקה נומרית של השפעת קוטר, צפיפות וקשיחות החלקיקים על התקדמות הגלים בשרשרת ישרה יחידה של דיסקות.

סעיף זה בא להשלים חלק מהשאלות המתעוררות לגבי השפעתם של מאפיינים שונים על התקדמות הגלים בשרשרת ישרה של חלקיקים. מכיוון אחר ניתן גם לראות בסעיף זה דוגמה לחקירה בסיסית של תכונות החומר הגרגרי המתאים ליישומי מיגון. הדרישה ביישומים אלה היא שהחומר הגרגרי יגרום לפיזור של האות ולירידה בגודלו. יתרונה של החקירה הנומרית נובע מהאפשרות לבודד את השפעתו של כל מאפיין על התנהגות המערכת. מאידך, חשוב לזכור כי במציאות לא תמיד ניתן לשנות מאפיין אחד מבלי להשפיע על האחרים ופעמים רבות ישנה "תחרות" בין המאפיינים מי משפיע יותר ועל כך יש לתת את הדעת. נציין גם כי העבודה על השפעת קוטר הדיסקות הושוותה באופן איכותי לתוצאות ניסוי המתוארות בסעיף 1.2.1.2.2.

##### 4.4.1 השפעת קוטר הדיסקות על התקדמות הגלים בשרשרת ישרה יחידה של דיסקות.

עבור חקירה זו נערכה הדמיה של שרשראות בנות 11 דיסקות בקטרים של 10mm, 20mm ו 40mm. נתוני החומר, תנאי השפה ורשת החישוב זהים לאלו המפורטים בסעיף 3.2. עבור כל שרשרת הותאם רוחב האימפקטור לקוטר הדיסקות אך אורכו נשאר 12mm. אות כניסה של לחץ בערך של 0.375MPa הופעל על כל שרשרת. האות היה בצורת מדרגה ונמשך 0.07ms. היות והלחץ זהה התקבל כי הכוח המופעל על כל שרשרת היה שונה. על דיסקות בקוטר 10mm הופעל כוח של 35.625N, על דיסקות בקוטר 20mm הופעל כוח של 71.25N ועל דיסקות בקוטר 40mm הופעל כוח של 142.5N.

באיור 54 מוצגים אותות של כוח המגע המנורמל (לפי הכוח המופעל בכניסה לשרשרת) בשלושת השרשראות עבור מרחק של 92mm מנקודת הפעלת הכוח. כלומר, הכוח נמדד בנקודת מגע שונה בכל שרשרת כמפורט באיור. ניתן לראות כי ככל שגדל קוטר הדיסקות האות מהיר יותר ואכן עבור שרשרת של דיסקות בקוטר 40mm האות מגיע ראשון לנקודת המדידה. תופעה זו מוסברת בריבוי המגעים אותם עובר האות כאשר קוטר הדיסקות קטן יותר אם נזכור כי המהירות דועכת בזמן מעבר האות במגעים (בעיקר בתחילת השרשרת). בנוסף נזכור כי בדיסקות בעלות קוטר גדול יותר המגע קשיח יותר (משוואה 2.1.9). תופעה נוספת הנצפית באיור זה היא העובדה שעבור הדיסקות בעלות הקוטר הגדול יותר נוצר אות רחב יותר או בעל משך זמן רב יותר.



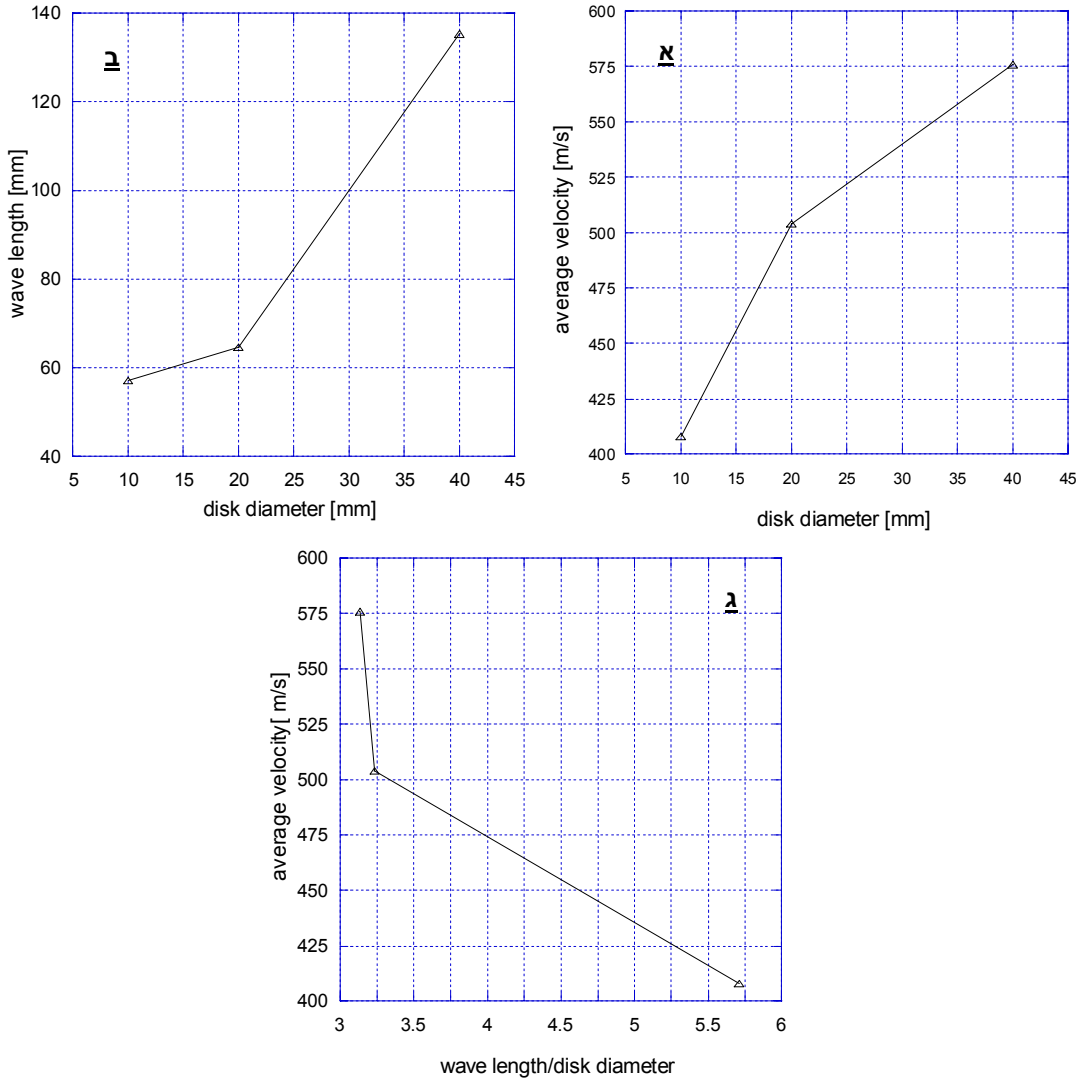
איור 54 כוח מגע במרחק של 92mm מנקודת ההעמסה עבור שרשראות של דיסקות בעלות קוטר שונה.

בכדי לבדוק את השינוי במהירות כתלות בקוטר הדיסקות נמדדה המהירות הממוצעת בכל שרשרת על פי ערכי המאמץ של Tresca במגע הראשון ובמגע האחרון. אם נביט באיור 55(א) נראה כי העליה במהירות הממוצעת עם העליה בקוטר הדיסקות אינה ליניארית וישנה האטה קלה בגידול במהירות. מגמה זו אולי ניתן לפרש גם כהתחלה של התכנסות ערך המהירות כפי שניתן היה לראות באיור 55.

בהמשך נמדד משך האות בשרשראות השונות במגע 4-5 אחרי שהגל מתייצב בצורתו. אורך האות, חושב ממכפלת משך האות והמהירות הממוצעת ומוצג באיור 55(ב). האיור מצביע על כך שישנו גידול באורך האות עם הגידול בקוטר הדיסקות אך גם כאן הגידול אינו ליניארי. ניתן לראות כי עבור דיסקות בקוטר 40mm אורך האות גדול באופן משמעותי מדיסקות האחרות. תופעה זו ניתנת אולי להסבר על ידי העובדה שחזית הגל המתקדמת בדיסקה מקבלת את צורת הדיסקה [איור 45(א)]. במקרה זה ככל שהדיסקה בעלת קוטר גדול יותר חזית הגל רחבה יותר ולכן ריכוז האנרגיה לנקודת המגע איטי יותר והגל מתארך. מעניין גם לראות כי במקרה זה הגידול באורך האות הוא תוצאה של גידול משותף במשך האות ובמהירות הממוצעת.

בסעיף 1.2.1.2.2 הוצג גם ניסיון לקשור בין המהירות הממוצעת בשרשראות ליחס בין אורך הגל וקוטר הדיסקה. איור 55(ג) מציג את אותם מאפיינים עבור ההדמיה הנוכחית. ניתן לראות כי בדומה לאיור 15 המהירות הממוצעת קטנה עם הגידול ביחס שבין אורך הגל וקוטר הדיסקה. ניתן להסביר זאת כמצב שבו ככל שישנם יותר מגעים על כל אורך גל, המהירות

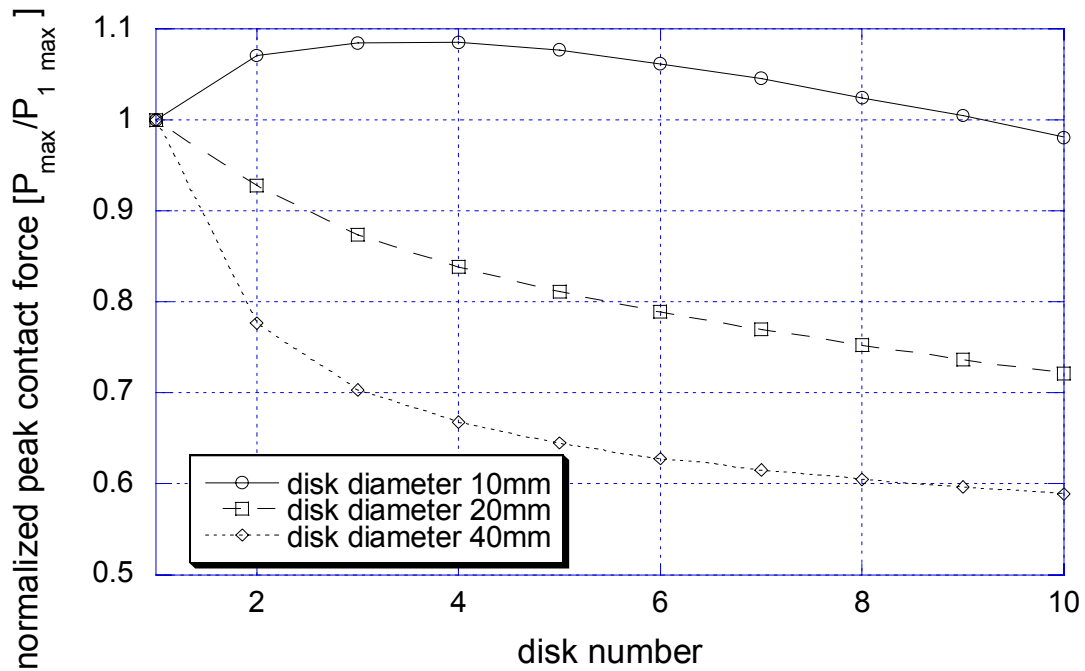




**איור 55 השוואת מאפיינים שונים של האות המתקדם בשרשראות של דיסקות בעלות קטרים שונים  
(א) מהירות ממוצעת כנגד קוטר הדיסקה (ב) אורך הגל כנגד קוטר הדיסקה  
(ג) מהירות ממוצעת כנגד אורך גל חלקי קוטר הדיסקה.**

נמוכה יותר. בנוסף, ניתן לראות כי ישנו דמיון רב בערך הנמוך של היחס שבין אורך הגל וקוטר הדיסקה עבור שרשראות המכילות דיסקות בקוטר 20mm ו 40mm. שרשראות אלה גם קרובות יותר במהירות הממוצעת שנמדדה בהן. מכאן ניתן להסיק כי כמו בניסוי המתואר בסעיף 1.2.1.2.2, גם ההדמיה מובילה לכך שערך נמוך יותר ביחס בין אורך הגל וקוטר הדיסקה, מסמל כי המהירות הממוצעת בשרשרת קרובה יותר למהירות המירבית האפשרית בשרשרת.

לסיום, נבחן השינוי בכוח המגע המרבי לאורך השרשרת. עקב הכוחות השונים בכניסה לשרשראות השונות נורמל כוח המגע המרבי לפי כוח המגע המרבי בדיסקה הראשונה. באיור 56 ניתן לראות כי כוח המגע המרבי דועך מהר יותר ככל שקוטר הדיסקה גדול יותר.



איור 56 כוח מגע מירבי מנורמל לאורך שרשראות של דיסקות בעלות קטרים שונים.

נזכיר כי ירידה זו מנוגדת למגמת המהירות הממוצעת הגדלה עם הגידול בקוטר הדיסקות. ניתן להבחין כי עבור שרשרת הדיסקות בקוטר 10mm ישנה אפילו עליה בערך כוח המגע המרבי לפני שמתחילה הדעיכה. נשים לב כי התופעה בולטת מאד בדיסקות הראשונות ונזכור גם כי בדיסקות בעלות קוטר גדול יותר משך האות גדול יותר. מכאן שכנראה גם הפעם מדובר בסידור מחדש של צורת אות הכניסה לצורת האות המתקדם בשרשרת. סידור זה נוצר בתחילת התנועה ובדרך כלל התרחבות של האות מלווה גם בדעיכתו. כפי שראינו תהליך השינוי מושפע בעיקר מתנועת הגלים בדיסקה אך מושפע גם מהמעבר במגעים שבין הדיסקות. הדעיכה בדיסקות בקוטר 40mm קטנה בצורה משמעותית אחרי הדיסקה החמישית וניתן לראות בכך סימן שהאות כבר קיבל את הצורה איתה הוא ימשיך להתקדם. כנראה העובדה שהאות בדיסקות בעלות הקוטר הקטן נע עם פחות פיזור יוצרת את המצב בו הוא מצליח לשמור על צורתו ולכן גם על ריכוז האנרגיה ולא לדעוך במהירות.

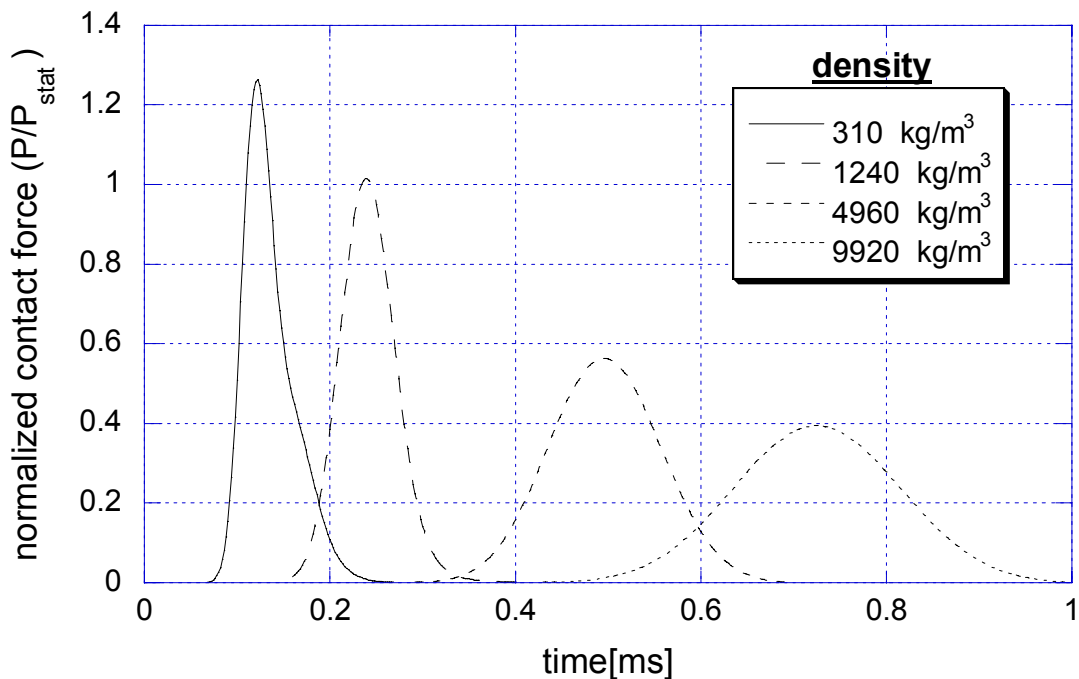
לסיום נזכיר כי כאשר מדובר באותו מספר דיסקות בכל שרשרת, ככל שקוטר הדיסקה גדול יותר השרשרת ארוכה יותר ולכן במקרה זה (אות העמסה קצר בשרשרת קצרה) ניתן לצפות לדעיכה רבה יותר עבור אות שעבר מרחק גדול פי ארבע.

#### 4.4.2 השפעת צפיפות הדיסקות על התקדמות הגלים בשרשרת ישרה יחידה של דיסקות.

שינוי בצפיפות החומר של הדיסקות תוך שמירה על קוטרן והתכונות המכניות שלהן הוא הליך קשה לביצוע בצורה ניסויית ללא השפעה על מאפיינים מכניים אחרים. במקרה זה ההדמיה הנומריה מאפשרת בחינה של השפעת מאפיין יחיד על התקדמות הגלים. מודל נומרי זהה לזה המתואר בסעיף 3.2 שימש להדמיה זו. ארבע שרשראות המכילות 11 דיסקות בקוטר 20mm ואימפקטור, כל אחת, הורכבו למטרת הדמיה זו. בכל שרשרת קיבלו החלקים צפיפות שונה. בכדי להישאר בתחום התוצאות שהתקבלו עד כה, נבחרו הצפיפויות על פי המסות שהתקבלו מהניסוי בדיסקות בעלות קטרים שונים. ההעמסה היתה זהה למתואר בסעיף 4.4.1.

ראשית נשים לב לעובדה כי מאחר וקטרי הדיסקות שווים בכל השרשראות אין הבדל בגורם הגיאומטרי המשפיע על קשיחות המגע במקרים השונים. נזכור גם כי תיאורית המגע שהכרנו לא מכילה שום תלות במסה או בצפיפות החומר (משוואה 2.1.9). מכאן שהתופעות להן נצפה יהיו קשורות יותר להתקדמות הגלים בחומר ופחות למעברם במגעים. עקב נפחן היתה של הדיסקות יעשה שימוש במושגים של מסה וצפיפות במקביל.

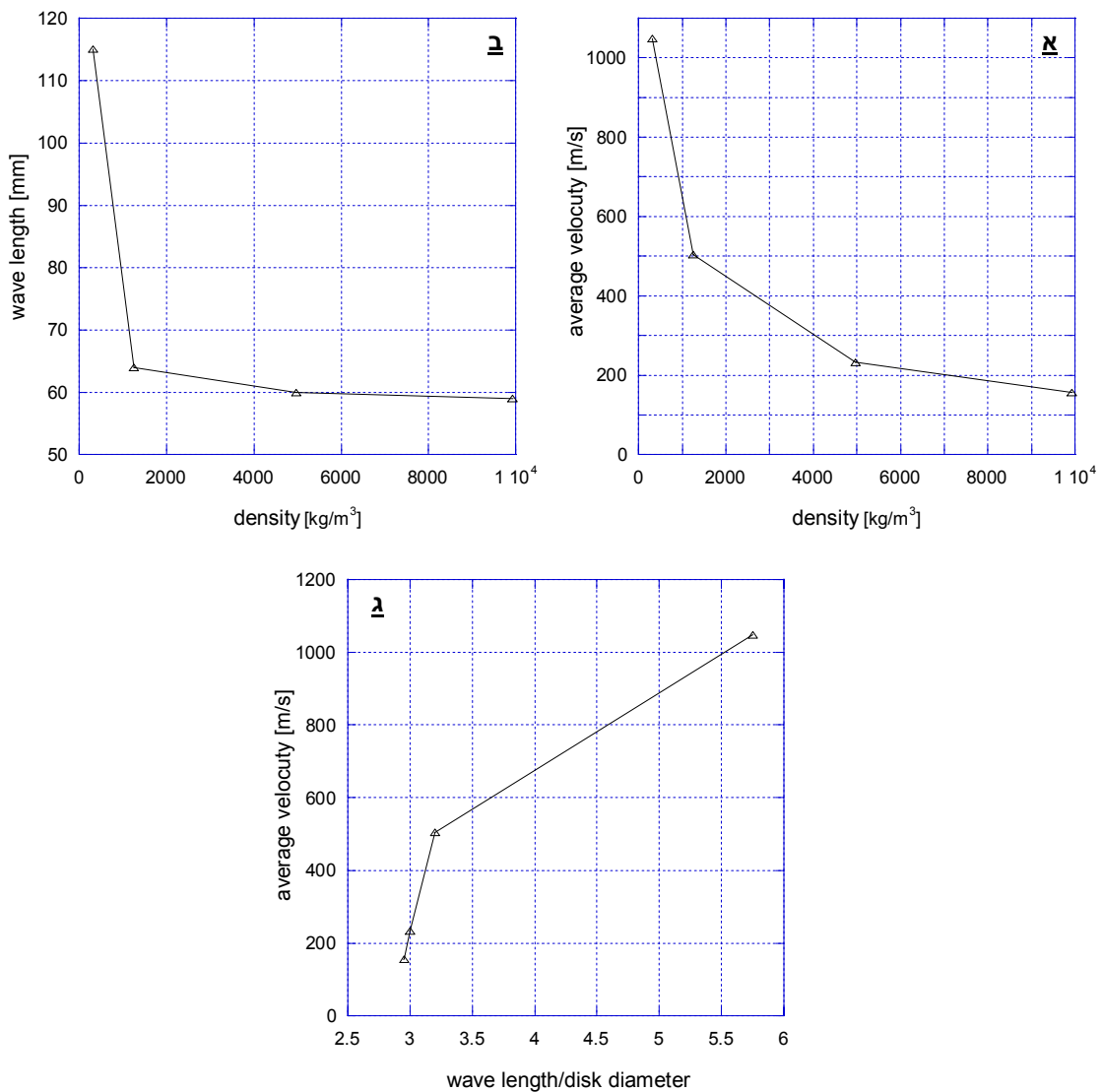
באיור 57 ניתן לראות את אות כוח המגע המרבי במגע 4-5 אחרי שנורמל לפי הכוח בכניסה. הצפיפויות השונות בהן נעשה שימוש מפורטות באיור. ברור לעין כי ככל שצפיפות הדיסקה נמוכה יותר האות מהיר וחד יותר. תוצאה זו ידועה מתורת הגלים שם צפיפות



איור 57 כוח המגע המנורמל במגע 4-5 עבור שרשראות של דיסקות בעלות צפיפות שונה.

גבוהה יותר של החומר מבשרת התקדמות איטית יותר של הגל. ההתקדמות האיטית יוצרת צורת גל אופיינית מפוזרת יותר. נציין גם כי האמפליטודה הנמוכה הנצפית בדיסקות בעלות הצפיפות הגבוהה היא תוצר של תהליך הדעיכה כפי שיוצג בהמשך.

נחזור על התהליך שבוצע בסעיף הקודם ונתחיל באיור 58 (א) המציג את השינוי במהירות הממוצעת כנגד השינוי בצפיפות. ניתן לראות שעם העליה בצפיפות ישנה ירידה במהירות והתכנסות לכיוון ערך כלשהו. נשים לב כי ברגע שהגורם הגיאומטרי אינו משחק תפקיד (קוטר דיסקה זהה) ניתן לפרש את הירידה גם כמות מהיר יותר. נמשיך לאיור 58 (ב) שם מוצג אורך הגל כנגד השינוי בצפיפות. גם אורך הגל יורד עם העליה בצפיפות ומתכנס בהמשך. ניתן לראות קרבה גדולה מאד בערכי אורך הגל עבור שלושת הצפיפויות



איור 58 השוואת מאפיינים שונים של האות המתקדם בשרשראות של דיסקות בעלות צפיפות שונה

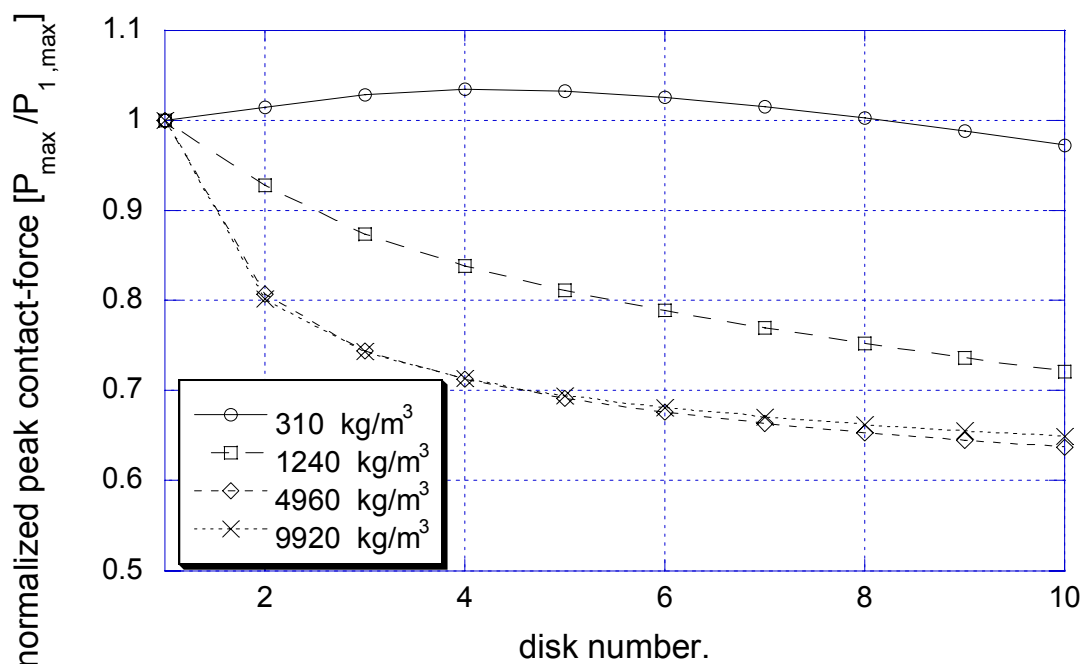
(א) מהירות ממוצעת כנגד קוטר הדיסקה (ב) אורך הגל כנגד קוטר הדיסקה

(ג) מהירות ממוצעת כנגד אורך גל חלקי קוטר הדיסקה.

הגבוהות יותר. כלומר ניתן לומר שעבור צפיפויות אלה השרשרת מעדיפה לכאורה להעביר אורך גל מסוים כמעט ללא קשר לצפיפות.

אמנם מאחר וקוטר הדיסקות זהה אין משמעות חדשה לחלוקה בקוטר זה, עדיין הועדף להציג באיור 58 (ג) את היחס בין המהירות הממוצעת ואורך הגל חלקי קוטר הדיסקה לשם השוואה. קל לראות כי המהירות הממוצעת עולה עם העליה ביחס בין אורך הגל לקוטר הדיסקה. חשוב גם להצביע על כך שמספר נקודות מרוכזות סביב ערך נמוך (3) של יחס בין אורך הגל לקוטר הדיסקה ומראות שינוי פחות משמעותי של המהירות בינהן. בהשוואה לאיור 58 (א) ניתן להגיד כי ערך נמוך יותר של היחס בין אורך הגל לקוטר הדיסקה מצביע כי המהירות הממוצעת בשרשרת קרובה יותר למהירות המינימלית האפשרית בשרשרת.

לסיום מוצג באיור 59 השינוי בכוח המגע המרבי לאורך השרשרת. כמו עבור הקטרים השונים גם כאן בוצע נרמול של הכוח המרבי לפי הכוח המרבי בדיסקה הראשונה. ניתן לראות כי בשרשרת עם הצפיפות הנמוכה ישנה הגברה קלה של האות לפני שהוא מתחיל לדעוך. לעומת זאת עבור השרשראות בעלות הצפיפות הגבוהה יותר דעיכת האות מהירה מאד. מעניין לשים לב כי בתחילה עולה קצב הדעיכה עם העליה בצפיפות אך עבור הצפיפויות הגבוהות הדעיכה כמעט זהה. נראה כי הדעיכה קשורה בפיזור שעובר האות בזמן תנועתו בתווך צפוף יותר. פיזור זה של האות מחייב ירידה באמפליטודה כאשר האנרגיה הכללית נשמרת. גם הפעם נוכל לראות מאיור 57 כי האות ששומר טוב יותר על צורתו החדה, במקרה זה האות בשרשרת בעלת הצפיפות הנמוכה, הוא זה שמתקדם עם פחות דעיכה.

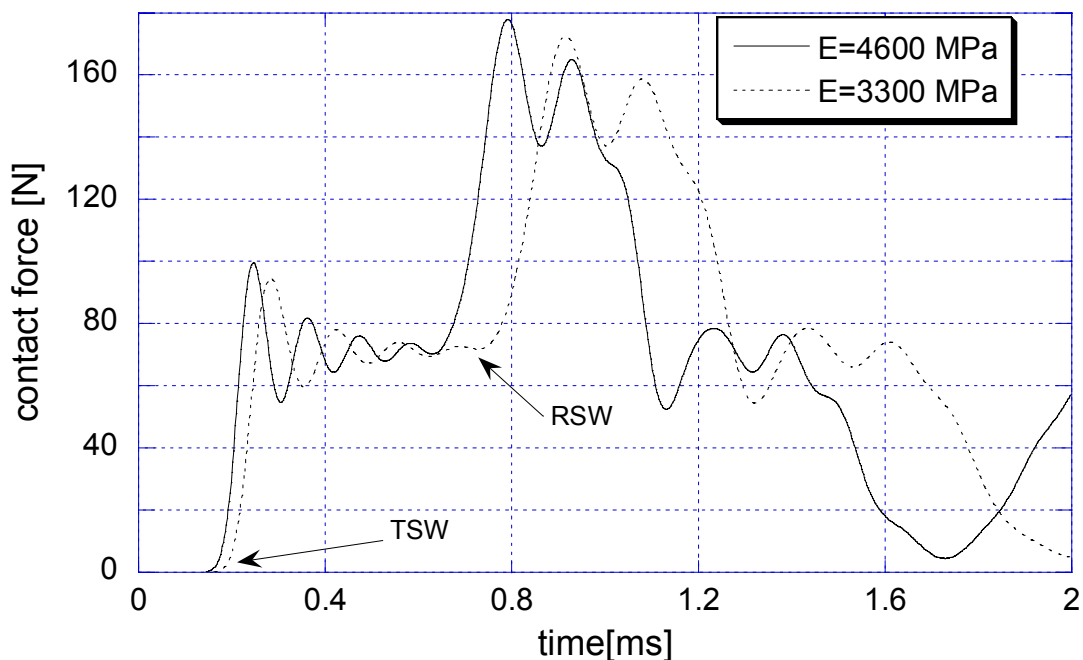


איור 59 כוח מגע מירבי מנורמל לאורך שרשראות של דיסקות בעלות צפיפות שונה.

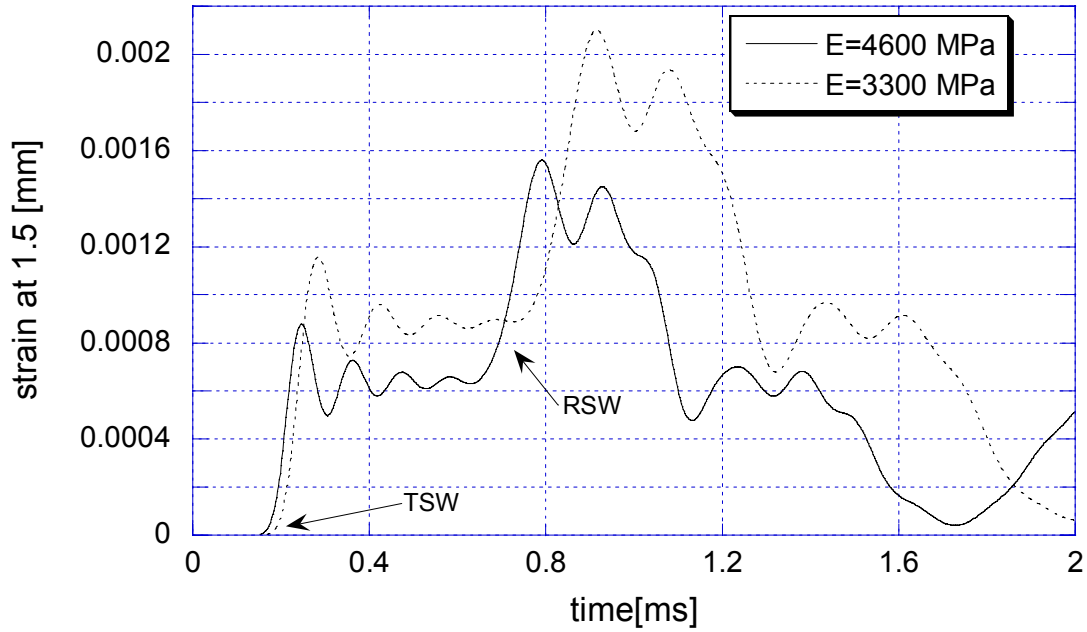
#### 4.4.3 השפעת קשיחות הדיסקות על התקדמות הגלים בשרשרת ישרה יחידה של דיסקות.

בסעיף זה הוחלט לבצע חקירה מצומצמת יותר ולהתמקד רק בתחום הקשיחות (מודול יאנג) של החומר איתו עבדנו. לפיכך בוצעה השוואה פשוטה בין הקשיחות שחושבה במעבדה לבין זו שנתונה על פי היצרן כפי שהן מצוינות בטבלה 2. המודל הזה לזה המתואר בסעיף 3.2 וההעמסה מתוארת בסעיף 4.1.1.

באופן כללי נתייחס לשרשרת שבה מודול יאנג גבוה יותר כשרשרת קשיחה יותר. באיור 60 מוצגת השוואה של אות כוח המגע האופייני במגע 4-5 עבור הקשיחויות המצוינות. מאיור זה ניתן לראות כי באופן כללי צורת האות דומה מאד עבור הקשיחויות השונות. מאידך, בולטים שני הבדלים עיקריים בין האותות. האחד הוא שישנה הזזה בפאזה בין שני האותות כאשר האות של השרשרת הקשיחה יותר מקדים תמיד את האות בשרשרת הפחות קשיחה. ניתן גם לראות כי הזזה זו גדלה עם התקדמות האות בשרשרת. ההבדל השני הוא שבשרשרת הקשיחה יותר התנודות אחרי ה-TSW ואחרי ה-RSW גדולות יותר. תופעה זו באה לידי ביטוי בכך שכוח המגע המרבי בשרשרת הקשיחה גבוה יותר וכן שאחרי ה-TSW דעיכת התנודות בשרשרת הפחות קשיחה משמעותית יותר. מעניין לראות שאחרי ה-TEW התנודות כמעט זהות. מתוך מדידה ניתן גם להצביע על כך שמשך הזמן של האותות החדשים בשרשרת הפחות קשיחה גדול ב-  $20-30\mu s$  מזה שבשרשרת הקשיחה. סימנים אלה ניתן לסכם לכך שהאות בשרשרת הקשיחה מתקדם מהר יותר, כוח המגע המרבי בשרשרת זו גבוה יותר, ובאופן כללי האות המתקדם בשרשרת זו מתפזר פחות ושומר יותר

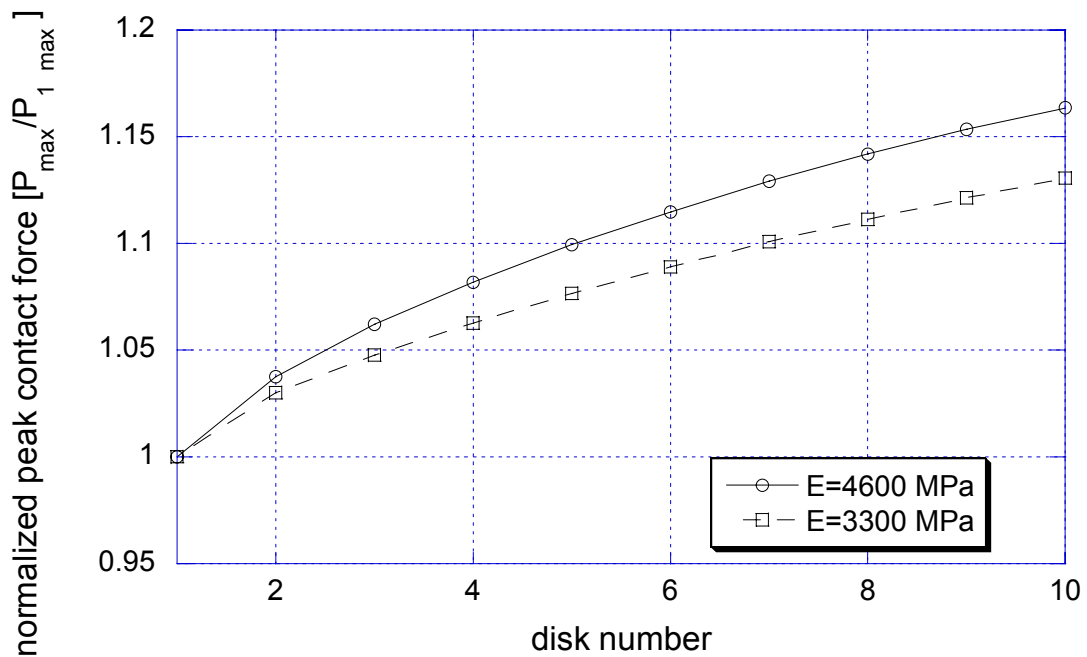


איור 60 אות הכוח במגע 4-5 עבור שרשראות של דיסקות בעלות קשיחות חומר שונה.



איור 61 המעוות כ-1.5mm מתחת למגע 4-5 עבור שרשראות של דיסקות בעלות קשיחות חומר שונה.

על צורתו המקורית. בדיקה של המהירות אכן מראה כי לעומת מהירות ממוצעת של 516m/s בשרשרת הקשיחה נמדדה מהירות ממוצעת של 455m/s בשרשרת הפחות קשיחה. נזכיר גם שלפי הביטוי התיאורטי לחוק המגע (משוואה 2.1.9) קשיחות החומר תורמת גם לקשיחות מגע גבוהה יותר.



איור 62 כוח המגע המירבי המנורמל, לאורך שרשראות של דיסקות בעלות קשיחות חומר שונה.

באיור 61 בחרנו להראות את המעוות כפי שנמדד במרחק של 1.5mm מתחת למגע בין דיסקות 4 ו 5. מאיור זה ניתן לראות שכצפוי המעוותים המתקבלים בשרשרת הפחות קשיחה גבוהים יותר. תופעה זו עוזרת להבין את התנועה האיטית יותר והפיזור הרב יותר בשרשרת זו. לסיום מוצג באיור 62 כוח המגע המרבי לאורך השרשראות השונות כשהוא מנורמל לפי כוח המגע המרבי בדיסקה הראשונה בכל שרשרת. ניתן לראות כי כפי שצפינו מוקדם יותר כוח המגע המרבי בשרשרת הקשיחה יותר, גבוה יותר ולכן הגברת הכוח המתקבלת בשרשרת זו גדולה יותר.

#### 4.4.4 סיכום

השפעתם של מספר מאפיינים על התקדמות הגל נבחנה בצורה נומרית. ניתן לראות כי גם לקוטר הדיסקה, גם לצפיפותה וגם לקשיחותה השפעה משמעותית על התקדמות הגלים בשרשרת. כמובן שכאשר ישנם מספר מאפיינים צריך להבין מי מהם משמעותי יותר. ראינו כי עבור השפעת קוטר הדיסקה על התקדמות הגלים ישנה התאמה איכותית של תוצאות ההדמיה לתוצאות ניסוי מהספרות.

תופעה מעניינת שאובחנה גם בהדמיה היא כי כאשר היחס בין אורך הגל וקוטר הדיסקה קטן נראה כאילו המהירות הממוצעת של האות המתקדם בשרשרת מתקרבת לגבול העליון או התחתון שלה. אופי גבול זה (עליון או תחתון) תלוי באם המנגנון השולט בהתקדמות הגל שואף להגדיל או להקטין את מהירותו. ראוי לציין כי גם בעבודות ניסוייות ואנליטיות מהספרות (ראה לדוגמא איור 15), הערך עליו מדובר עבור היחס בין אורך הדיסקה לקוטר נע בין 3 ל- 5 קטרי הדיסקה.

ראינו כי יתכן שנקבל דעיכה של הכוח בכניסה או הגברה של כוח זה. כלומר, כאשר הגל מתפזר פחות עקב מאפיין זה או אחר הוא שומר על האנרגיה שלו מרוכזת ומסוגל לנוע עם פחות דעיכה. כמובן שתופעה זו קשורה בסידור האנרגיה שעובר הגל בתחילת תנועתו. מכאן אולי ניתן להרחיב ולומר כי כאשר ישנה התאמה טובה יותר בין צורת הגל ומשכו בכניסה לשרשרת לבין צורתו כפי שהשרשרת מאפשרת בעת ההתקדמות, הוא דועך פחות תוך כדי תנועתו. חשוב לשים לב שהמהירות תמיד דועכת בדיסקות הראשונות ללא קשר לשינוי בכוח המגע המרבי. לסיום נציין כי ניכר שאורך השרשראות שנבחר היה קצר מדי בכדי לתאר את כל התופעה.

כהמלצה לעבודה נוספת, ראשית יש לבדוק מה באמת קורה בדיסקות בעלות קוטר גדול יותר. מעניין היה גם לבדוק האם עבור המאפיין הנבדק, לדוגמא קוטר הדיסקה, ניתן למצוא למהירות הממוצעת גבול עליון וגבול תחתון. אם כן, מעניין האם בשני הקצוות היחס בין אורך הגל לקוטר הדיסקה יהיה תמיד קטן. שאלה נוספת שעלתה במהלך העבודה היתה, האם חלים שינויים בדעיכת המהירות ואם כן אילו שינויים ואיך הם מושפעים מהמאפיינים השונים.



כזכור בתחילת הפרק התייחסנו לבדיקת המאפיינים השונים גם כתרגיל לבדיקת תכונות התווך הגרגרי למטרות מיגון. ניתוח התוצאות לגבי המאפיינים שנבדקו מראה כי חלקיק בעל קשיחות נמוכה וצפיפות גבוהה היה יוצר דעיכה ופיזור מהירים של אות הכוח הנכנס. בנוסף חלקיק כזה גם גורם לאות לנוע לאט יותר. לגבי קוטר החלקיק היעיל ביותר למטרת המיגון, יש לבחור בין החלקיק הגדול יותר המקנה תכונות של דעיכה ופיזור חזקים לאות מצד אחד, אך מהירות התקדמות האות בתוך חלקיקים כאלה גבוהה ביחס למהירות התקדמותם בחלקיקים קטנים. מאידך בחלקיק הקטן תיתכן הגברה של האות לאורך זמן קצר והוא שומר טוב יותר על צורתו. לכן בבחירת קוטר החלקיק יש להחליט אם ישנה משמעות למהירות האות. בהמשך יש לבדוק מודל המכיל שילוב של מספר מאפיינים בכדי לראות את ההשפעה ההדדית שלהם ולבחון האם ההתנהגות של כל מאפיין בנפרד זהה גם בנוכחות מאפיינים אחרים.

#### **4.5 הדמיה של העמסת שרשרת ישרה יחידה בת 80 דיסקות באותות בעלי משך שונה.**

התופעה המעניינת ביותר שהופיעה בניסוי היתה כאמור התפרקות אות הכניסה לאותות קצרים יותר. כפי שניתן לראות בסעיף 1.2.1.2.2 נמצא כי עבור שרשרת של דיסקות זהות, התפרקות זו תלויה במשך אות ההעמסה על השרשרת. למעשה מתוארת שרשרת הדיסקות כמערכת הבוררת גלים. למערכת זו אורך אות אופייני המתקדם בה עם פיזור מועט. עבור אותות ארוכים מהאות האופייני יתרחש פירוק של האות לאותות קצרים יותר. אותות אלה אמורים להתקדם ביחידות עם פיזור מועט תוך שהם מתרחקים אחד מהשני היות וההבדלים באמפליטודה שלהם משפיעים גם על המהירות. האמפליטודה המרבית של האות אחרי הפירוק עולה ובהמשך דועכת בהדרגה. נציין כי חקירה מסוג זה כבר בוצעה כאמור בצורה ניסויית ונומרית עבור חומר שונה מעט ותוצאותיה דווחו בסעיף 1.2.1.2.2.

כדי לבדוק תופעה זו נבנה מודל נומרי המכיל שרשרת ישרה יחידה בת 80 דיסקות כשבראשה אימפקטור באורך 12mm. מודל זה הועמס בארבעה אותות כניסה בעלי צורת מדרגה אך באורך שונה. אמפליטודת ההעמסה היתה זהה לכל האותות ושווה ל-0.375MPa כמו באות שהופעל על השרשרת בת 11 הדיסקות.

לגבי אורך אות הכניסה צוין בסעיף 1.2.1.2.2 כי יש המזהים בין אורכי האותות הנוצרים אחרי התפרקות אות ארוך, לאורך האותות אותם תעביר השרשרת עם שינוי צורה מועט. מאחר ונראה מהספרות כי ישנה גם קרבה בין משך האות הנוצר אחרי הפירוק למשך האות האופייני, נבחר מתוך טבלה 3 אות בעל משך זמן של  $110\mu s = 0.11ms$ . המערכת הועמסה באות כניסה בעל משך זמן זה ובאותות קצרים וארוכים ממנו.

#### 4.5.1 תוצאות ההדמיה

איור 63 מציג אותות של כוח המגע המנורמל לפי כוח המגע המרבי בדיסקה הראשונה בכל שרשרת. כל שרשרת נתונה לאות כניסה בעל משך שונה כמפורט באיור. אות כוח המגע מוצג עבור כל דיסקה עשירית בשרשרת. מעניין לציין כי עבור אות הכניסה של 0.11ms והאותות הממושכים יותר היה ערך כוח המגע המרבי בדיסקה הראשונה זהה (נרמול לפי אותו ערך). באות הקצר יותר היה ערך כוח המגע המרבי קטן במעט (3N=3%). מן האיור ניתן לראות מספר תופעות:

(1) בדיקה זריזה בכל השרשראות מעלה כי כל האותות בדיסקה הראשונה, שונים מעט במשך הזמן שלהם ממשך הזמן של אות ההעמסה. סיבה אפשרית לשינוי זה או לחלקו היא השינוי שעובר האות בדרכו לצורה הסופית שבה הוא ממשיך להתקדם. נזכור גם שהאות עבר דרך האימפקטור ואנו לא מקבלים אותו בצורה ישירה על הדיסקה הראשונה.

(2) עבור אות הכניסה הקצר [איור 63(a)] הירידה בכוח המגע המרבי מיידית. ככל שמתארך את הכניסה אנו רואים עליה התחלתית בכוח המגע המרבי המלווה בהמשך בירידה. ניתן גם לראות כי ככל שמתארך את הכניסה מתרחשת תחילת הירידה בכוח המגע המרבי בשלב מאוחר יותר. כך נצפית תחילת הירידה עבור אות כניסה של 0.11ms אחרי הדיסקה החמישית, עבור אות כניסה של 0.28ms אחרי הדיסקה העשרים ועבור אות כניסה של 0.56ms אחרי הדיסקה השלושים. נזכיר כי גם במקרה בו נבדקה שרשרת בת 11 דיסקות היה אות הכניסה ארוך מאד וגם שם צפינו בעליה מתמדת של כוח המגע המרבי.

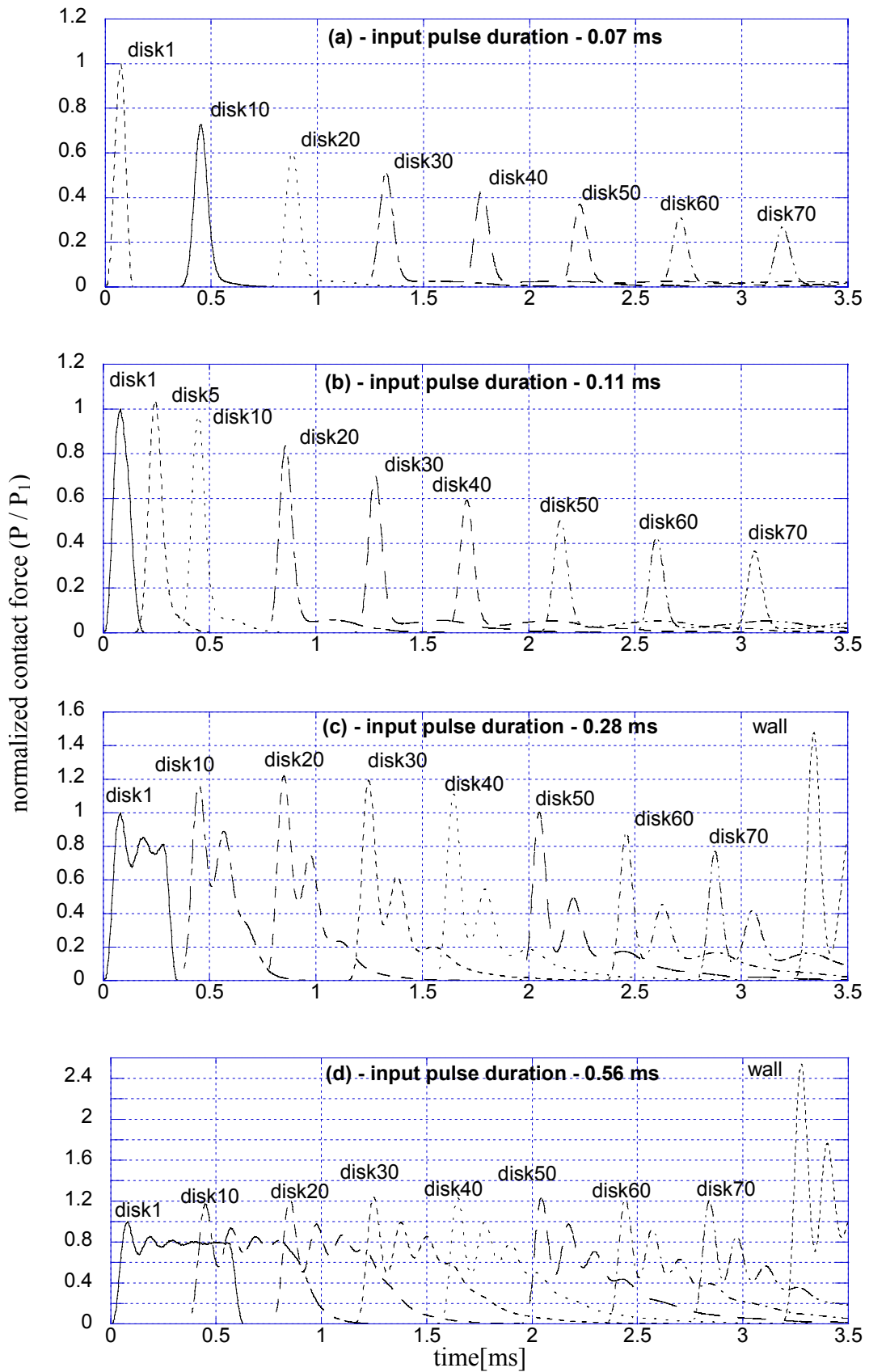
(3) נראה כי כל האותות מתחילים לקבל מריחה של זנב הגל בשלב מוקדם מאד בשרשרת ללא קשר לשינוי בגודל האות המרבי. הכוונה, כפי שניתן לראות באיור 63(a), היא שאות הכוח יורד כמעט עד לאפס ואז הוא מתרחב מאד. תופעה זו לא נצפתה בניסויים אך היא מופיעה גם בתוצאות של הדמיות בשיטות אחרות [Sadd *et al.* (1993)]. תופעה זו ניכרת בצורה מעט שונה גם באותות הכניסה הארוכים יותר ותורמת לכאורה לפיזור האות. ניתן להניח כי הסיבה

לתופעה זו נומרית בחלקה ועל כך נדון בהמשך.

(4) באותות הכניסה הארוכים יותר המופיעים באיור 63(c) ובאיור 63(d) ניתן לראות כי בדיסקה הראשונה עדיין נשמרת צורת המדרגה של אות הכניסה. צורת האות בשרשראות אלה גם מזכירה יותר את צורת האות בשרשרת בת 11 דיסקות.

(5) באותות כניסה של 0.07ms ו 0.11ms לא רואים התפרקות של האות המרכזי לאותות קצרים יותר. תופעה זו נצפית רק באותות הארוכים יותר (איור 63(c) ואיור 63(d)).

(6) ניתן להבחין כי באותות שעוברים פירוק כמו באיור 63(d) צורת האות עברה שינוי מתנודות סביב ערך ממוצע בדיסקה 10, לארבע תנודות כמעט נפרדות בדיסקה 70. ניתן להניח כי בעבור שרשרת ארוכה מספיק היתה מתקבלת הפרדה ברורה יותר.



איור 63 כוח המגע המנורמל לאורך שרשראות של 80 דיסקות תחת אות כניסה בעל אורך שונה.

(7) מעניין לעקוב אחרי הפסגות הנוספות הנוצרות בעת התפרקות האות באיור 63 (c) ובאיור 63 (d). הפסגה השניה גדלה גם היא לאורך מספר דיסקות אך מתחילה לאבד מגודלה בעוד הפסגה הראשונה (כוח המגע המרבי) עדיין גדלה. באיור 63 (c) ניתן לראות כי הפסגה השלישית אובדת לכאורה בין דיסקה 1 ו 10 אך מופיעה פעם נוספת בדיסקה 20 ואילך. חזרה זו נעשית באמפליטודה נמוכה בהשוואה לאמפליטודה המקורית. באיור 63 (d) מעניין לראות כי הפסגה הרביעית המופיעה בברור בדיסקה 10 יורדת לאט בגודלה.

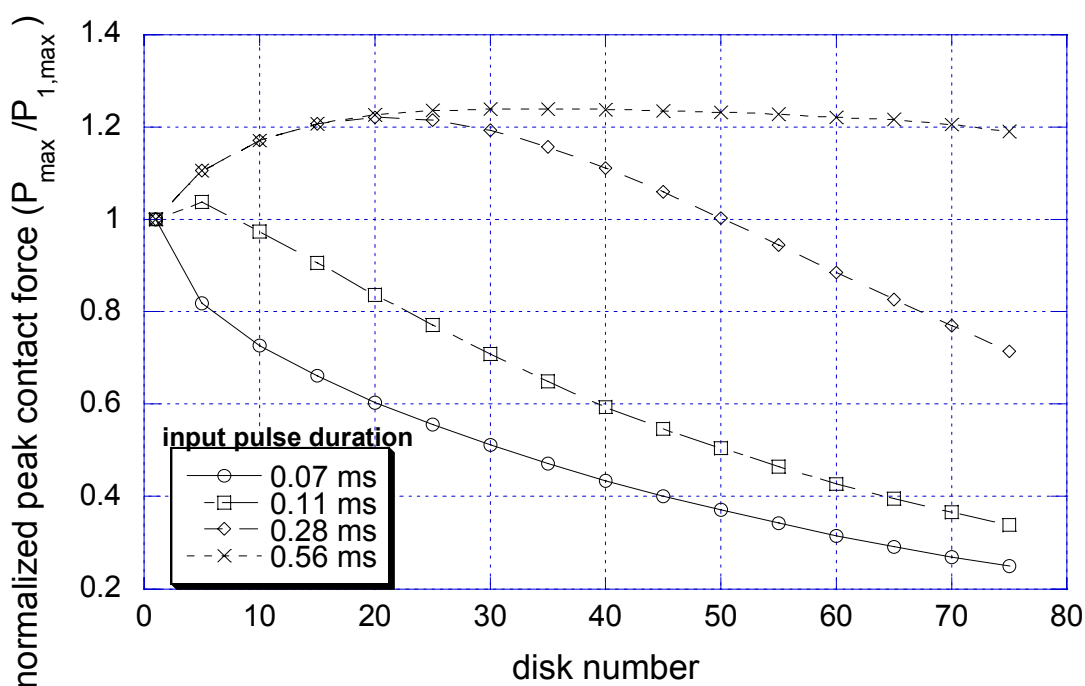
(8) תופעה נוספת הנצפית באיור 63 היא העובדה כי עבור אות כניסה ארוך יותר ולכן בעל אנרגיה רבה יותר, מהירות גל המאמצים בשרשרת גבוהה יותר. התופעה בולטת מאד עבור אות כניסה של  $0.07\text{ms}$  המוצג באיור 63 (a), שם האות כלל לא מגיע לדיסקה 80 בזמן הסימולציה ( $3.5\text{ms}$ ).

נזכיר כי למעט התופעה האחרונה כל השינויים שהוזכרו למעלה ביחס לצורת האות פורשו בעבר (סעיף 1.2.1.2.2) כסידור מחודש של האנרגיה באות. סידור זה כולל את המעבר מצורת המדרגה בכניסה לשרשרת, לצורת התנודות על שלביה השונים. הדגש בסידור הוא על התפתחות פסגה הגבוהה יותר מהאחרות והתקדמותה מהר יותר תוך שהיא צוברת אנרגיה נוספת. כך מתקבל שבאות העובר פירוק תמיד מתקבלת הגברה של הכוח.

באיור 64 מוצג כוח המגע המרבי לאורך השרשרת, מנורמל לפי כוח המגע המרבי

בדיסקה הראשונה. איור זה מחדד מספר נקודות שניתן היה לראות גם באיור 63 :

(1) ירידה של כוח המגע המרבי עבור אות כניסה של  $0.07\text{ms}$  לעומת עליה המלווה בירידה



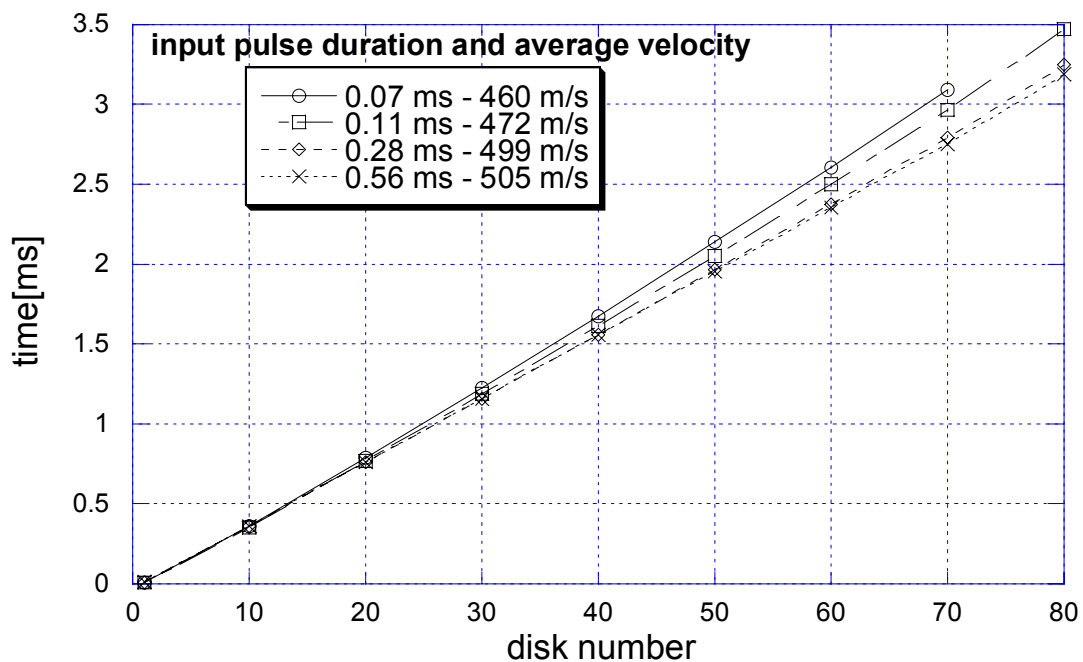
איור 64 כוח המגע המרבי המנורמל לאורך שרשראות תחת אות כניסה בעל אורך שונה.

בשאר האותות. באותות אלה ישנה הגברה של הכוח בלמעלה מ-20% יחסית לכוח בכניסה למערכת. נזכיר כי הגברה מעין זו ואף חזקה יותר אובחנה גם בניסוי וגם בהדמיה של שרשרת בת-11 דיסקות תחת אות כניסה ארוך יותר כפי שראינו למעלה (איור 44).

(2) ניתן לראות כי באות כניסה של  $0.07\text{ms}$  הירידה בגודל כוח המגע המרבי חזקה מאד בתחילת השרשרת (10 דיסקות ראשונות) ומתמתנת בהמשך. תופעה דומה נצפית אך באופן מוחלש עבור אות כניסה של  $0.11\text{ms}$  שם הדעיכה הממשיכה את העליה בכוח המגע המירבי מתרחשת בהדרגתיות. נזכיר כי תופעה זו של דעיכה חזקה בדיסקות הראשונות נצפתה גם בשרשרת של 11 דיסקות בנות  $40\text{mm}$  (סעיף 4.4.1) וגם עבור דיסקות בעלות צפיפות גבוהה (סעיף 4.4.2). עבור אות הכניסה של  $0.28\text{ms}$  השרשרת לא מספיק ארוכה בכדי לצפות בהתמתנות של הירידה ועבור אות הכניסה של  $0.56\text{ms}$  השרשרת לא מספיק ארוכה בכדי לראות ירידה משמעותית. נציין פעם נוספת כי חלק עיקרי מהשינוי החד באות הנראה בדיסקות הראשונות קשור במעבר של כל גל בכל תווך מצורתו בזמן ההעמסה לצורתו האופיינית בעת התנועה בתווך. שינוי זה יכול להיות כרוך בפיזור ובדעיכה במקביל.

(3) מהשוואה בין שני האותות הארוכים ניתן לראות חפיפה מוחלטת בערכי כוח המגע המרבי עד הדיסקה ה-15 לפחות.

לסיום מציג איור 65 את המהירות הממוצעת של התקדמות גל המאמצים בשרשרת. ניתן לראות כי ככל שאות הכניסה ארוך יותר גל המאמצים מתקדם מהר יותר. חשוב לציין כי תוצאה זו עומדת בניגוד לתוצאה המופיעה אצל *Zhu et al. (1997)*. אנו נוטים להסביר הבדל זה בכך שאצלנו משך הזמן הגדול פירושו עוד אנרגיה המוכנסת למערכת, בעוד שבעבודה



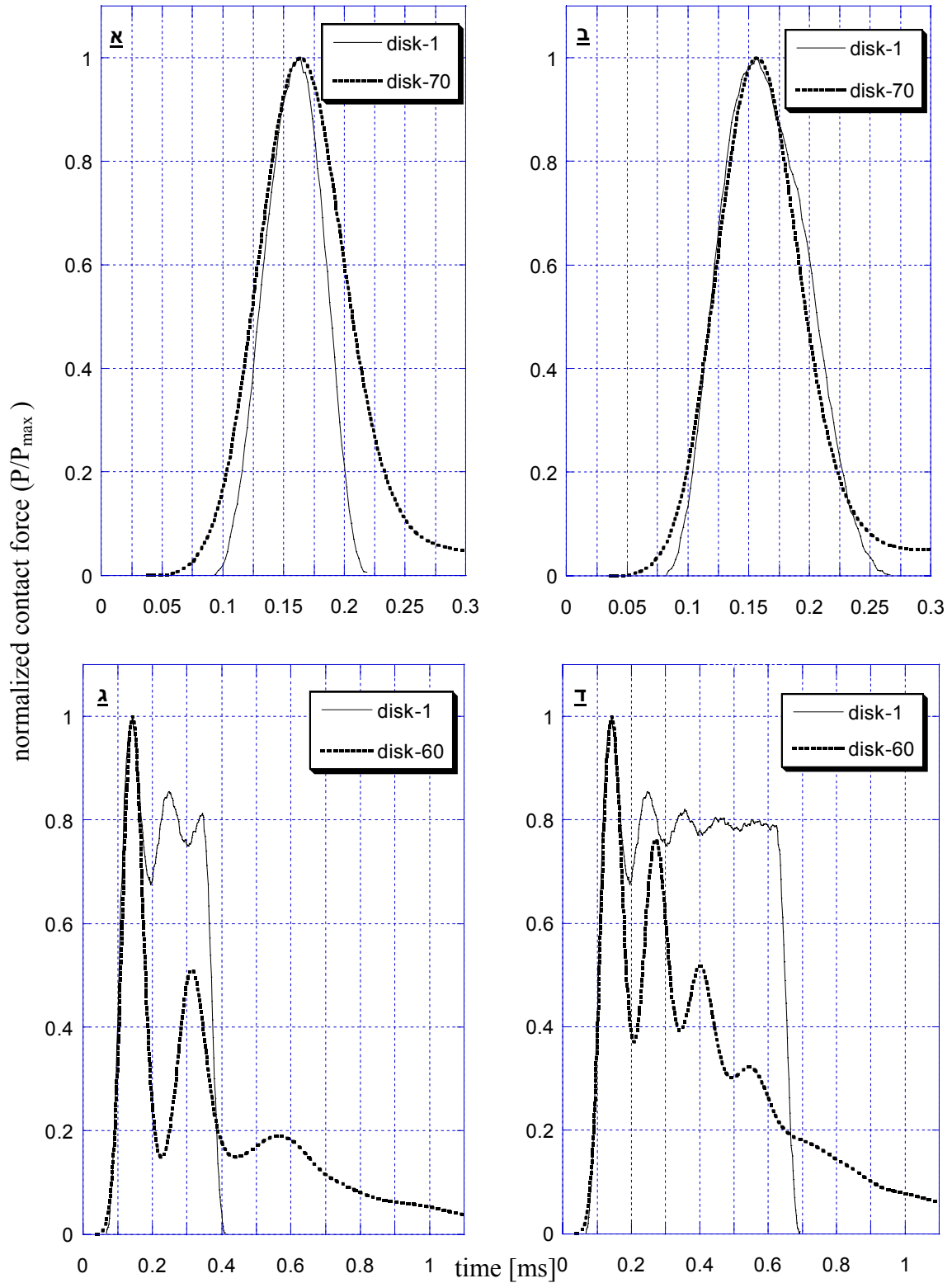
איור 65 המהירות הממוצעת של האות הראשון המתקדם בשרשרת תחת אות כניסה בעל אורך שונה.

המצוטטת כמות האנרגיה בין אותות שונים דומה והארכת משך האות מתבצעת באופן מכני על ידי העברתו בחומר פחות קשיח.

ניתן גם לראות כי כמו עבור כוח המגע המרבי, מהירות הגל בשרשראות תחת אות כניסה של  $0.28\text{ms}$  ו  $0.56\text{ms}$ , דומה מאד ורק אחרי למעלה מ-40 דיסקות ישנה הפרדה. כלומר, מהירות האות בעל האמפליטודה הגדולה יותר אחרי הפירוק (האות הראשון בהדמיה) אינה תלויה באורך אות הכניסה בשלב הראשון של התנועה. תוך כדי התקדמות כשאינן מספיק אנרגיה האות מאבד ראשית מגודלו ורק אחר כך ממהירותו.

על מנת שנוכל לסכם את טיב המודל ננסה לבדוק את תופעת הפיזור המתגלה באותות השונים. איור 66 מציג את של כוח המגע בשתי דיסקות המצויות במרחק רב זו מזו, בכל שרשרת שנבדקה. כל אות מנורמל על פי ערך כוח המגע המרבי שלו. עבור אות כניסה של  $0.07\text{ms}$  ניתן להבחין באיור 66(א) בהתרחבות קלה או בגידול קל במשך האות. נזכור כי מדובר באות כניסה קצר ולכן גם בעל מעט אנרגיה התחלתית. בנוסף נזכור כי כבר ראינו כי אותות כוח שעברו דעיכה גדולה (איור 64) בתחילת דרכם ליוו אותה גם בפיזור קל. כלומר, יתכן כי סידור האות בתחילת דרכו היא הסיבה הפיזיקלית לפיזור זה. עבור אות כניסה של  $0.11\text{ms}$  ניתן לראות באיור 66(ב) כי אות זה כמעט ולא עבר פיזור על פני מרחק של 70 דיסקות. כלומר, יתכן ואפשר לקבוע כי מתוך אות כניסה זה נוצר האות האופייני של המערכת. על פי המידע שראינו לגבי השינוי בכוח המגע המרבי (איור 64), אות זה עבר בעיקר דעיכה עקב ריסון לאורך 70 דיסקות. תוצאה זו מאשרת חלק מההתנהגות לה ציינו עבור התקדמות אות באורך האות האופייני. באיור 66(ג) ו (ד) ניתן לראות כי עבור אותות כניסה ממושכים העוברים פירוק, האות הראשון (כוח המגע המרבי) אינו עובר פיזור לאורך 70 דיסקות. כלומר כנראה שגם האות שנוצר אחרי הפירוק הוא באורך האות האופייני של המערכת. ניתן גם לראות כי עבור אות כניסה של  $0.28\text{ms}$  המרחק בין האותות החדשים אחרי הפירוק (מרחק בין שתי פסגות סמוכות) גדול יותר אחרי 60 דיסקות מאשר אותו מרחק בשרשרת תחת אות כניסה של  $0.56\text{ms}$ . ניתן לפרש תופעה זו בכך שבשרשרת תחת אות כניסה בעל משך של  $0.56\text{ms}$  יש יותר אנרגיה, אמפליטודת האותות גבוהה יותר ולכן גם מהירותם והם מצליחים לשמר את הקרבה ביניהם לאורך מרחק רב יותר. ניתן לראות כי גם באותות אלה אין ירידה חדה של האות לאפס עם ירידתו אלה 'מריחה' ארוכה שמקורה כנראה בסיבות נומריות.

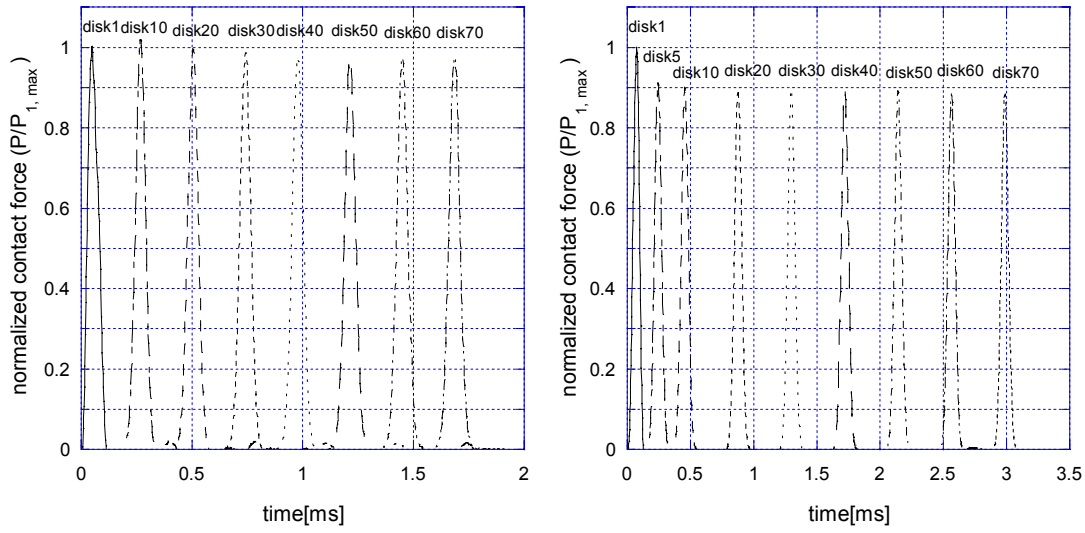
אחת הסיבות שהועלו ל'מריחת' האות היא נוכחות ריסון המגע במודל. לפיכך בוצעה הדמיה של אותו מודל ללא כל ריסון מלבד ריסון נומרי. כמובן שזהו מצב לא פיזיקלי (אין בליעת אנרגיה) אך כפי שניתן לראות באיור 67(א) הורדת הריסון גרמה לכך שהאות לא 'נמרח' וירד עד לאפס בצורה דומה לזו שבה הוא עלה. התוצאות לגבי צורת הפיזור היו דומות במודל זה לאלו שהושגו במודל עם ריסון. ניתן גם לציין כי עבור האותות שאינם



איור 66 הכוח המנורמל לפי ערכו המרבי, בשתי דיסקות לאורך שרשרת תחת אות כניסה בעל אורך של  
 (א) 0.07ms (ב) 0.11ms (ג) 0.28ms (ד) 0.56ms.

עוברים פירוק במודל ללא ריסון לא נצפתה שום דעיכה מלבד שינוי קל הקשור בסידור האות בתחילת תנועתו.

הדמיה נוספת שנעשתה לבדיקת השפעת הפרמטרים היתה בבדיקת המודל עם אותו ריסון בו השתמשנו אך עבור מגע קשיח מאד. מאיור 67(ב) ניתן לראות כי במקרה זה איבד הריסון מהשפעתו ופעם נוספת נצפתה התקדמות עם תוצאות פיזור דומות וללא דעיכה או 'מריחה' של האות.



**איור 67** אותות כוח מנורמלים במגעים לאורך שרשרת (א) עם מגע רך וללא ריסון (ב) עם מגע קשיח וריסון.

#### 4.5.2 סיכום

המודל הנוכחי מצליח לדמות בצורה איכותית את השפעתו של אורך אות הכניסה על התקדמות האות בשרשרת. השוואת התוצאות הנוגעות לשינוי בצורת האות תוך כדי התקדמותו בשרשרת, לאלו המופיעות בספרות (סעיף 1.2.1.2.2 ו 1.2.2.2) מראה התאמה איכותית של רוב התופעות. התופעה היחידה עליה אין הסכמה היא השפעת השינוי במשך אות הכניסה על השינוי במהירות האות אך כפי שצוין מדובר לדעתנו בהגדרה שונה של אות הכניסה.

תוך שימוש במשך האות שנוצר אחרי פירוק אות כניסה ארוך לאותות קצרים, יצרנו אות כניסה המתקדם בשרשרת ללא פיזור על פני 70 דיסקות. זהו כנראה אות בעל אורך האות האופייני של המערכת. כמו בשיטות הדמיה אחרות גם במודל זה לא הצלחנו לחזור באופן מדויק על תוצאות ניסויים (איור 18-אות העמסה של  $200\mu\text{s}$ ) בהן עבור אות כניסה בעל אורך מסוים, האות דועך מעט תוך כדי התקדמותו בשרשרת. יתכן כי לא נבדק אות הכניסה המתאים ויתכן כי הצירוף המסוים של קשיחות המגע וריסון המגע שנבחרו, יצרו דעיכה חזקה



של האותות. תופעות אלו ממחישות את החשיבות בהתאמת הפרמטרים השונים הקשורים במנגנונים המכניים השונים בעת בניה וכיול של המודל הנומרי.

ניתן לומר כי הצגת האותות כפי שהופיעה באיור 66 מאפשרת להתעלם מה'מריחה' הנומרית והפיזור המזוהה איתה. תופעת הפיזור שעדיין מופיעה באותו איור נתמכת בהסבר פיזיקלי.

מספר תופעות מעניינות שהובחנו במהלך העבודה לא נחקרו עדיין. מעניין לבדוק האם גם במקרים אחרים (תכונות חומר וגיאומטריה אחרות) ניתן להשתמש במשך האות של האותות אחרי הפירוק בכדי לקבל אות המתקדם בשרשרת ללא שינוי צורה. ניתן גם לבדוק האם באמת ניתן למצוא במגבלות מודל זה אות שיתקדם ללא דעיכה ואולי גם קיים אות המתקדם ללא פיזור וללא דעיכה. בנוסף ראוי גם לבדוק עבור השוואה בשרשרת ארוכה האם נכון/עדיף להשתמש באות מהדיסקה הראשונה או שעדיף לבדוק כנגד אות מהדיסקה החמישית או העשירית שם הגל כבר קיבל את הצורה איתה הוא מתקדם. לסיום, מעניין היה גם לבצע השוואה של השפעת צורת האות בכניסה על התקדמות הגל.

## 5 סיכום

עבודה ניסויית ונומרית זו מציגה בצורה בסיסית את התופעות הקשורות בהתקדמות אותות מכניים בשרשרת ישרה יחידה של דיסקות. בין הנושאים שנחקרו ניתן למצוא את התקדמות האות בשרשרת הכולל מפגש והחזרה מהשפות הקיצוניות, השפעת עומס סטטי מוקדם על התקדמות האות תחת העמסה דינמית וכן השפעת מאפיינים גיאומטריים, תכונות החומר ואורך אות הכניסה על התקדמות האות בשרשרת.

המודל הנומרי היווה את הכלי העיקרי בעבודה. מודל זה נבנה באמצעות התוכנה המסחרית ABAQUS העושה שימוש בשיטת האלמנט הסופי. שיטה זו פחות נפוצה בחקירות נומריות של תווך גרגרי. המודל המכיל דיסקות המסוגלות לעבור מעוות, נבנה תוך שילוב של קשרי מגע המכילים מנגנונים של קשיחות וריסון בין הדיסקות. בסך הכל ישנה במודל תלות בתכונות החומר ובשני מאפיינים נוספים. חשוב לציין כי חוק המגע שהתקבל מהתוכנה מזכיר מאד את זה של Hertz. בחלק הניסוי נעשה שימוש במערכת המכילה ניקבת הלם ליצירת העמסה סטטית ודינמית ובלייזר, פולריסקופ ומצלמת CCD לצילום התקדמות גל המאמצים בדיסקות העשויות מחומר פוטואלסטי. באופן ניסוי, נחקרה רק השפעת העומס הסטטי המוקדם על התקדמות הגלים בשרשרת.

כיול המודל הנומרי נעשה אל מול תוצאות של כוחות המגע, המעוותים באזור המגע ומהירות האות. תוצאות אלה התקבלו מניסוי שבו הועמסה שרשרת בת 11 דיסקות בקוטר 20mm באות כניסה ארוך בעל צורת מדרגה. המודל שנבנה מצליח לשחזר בצורה איכותית את מרבית התופעות המתקבלות בניסוי שנערך במעבדה על ידי Glam(2004) ובניסויים דומים שנחזו בספרות עבור חומרים שונים וצורות העמסה שונות. חשוב לציין כי יתכן שאי ההתאמות שניצפו מרמזות כי שינוי בערכי המאפיינים, או אולי שינוי המאפיינים עצמם, יכול להוביל לתוצאות מתאימות יותר. עקב ההתאמה שהתקבלה התבסס המשך העבודה הנומרית רק על מודל זה ללא שינויים כלשהם. מבין התוצאות הרבות שראינו נציין את העיקריות:

- 1) המהירות הממוצעת של הגלים עולה ככל שהם נעים בתווך דחוס יותר או בתווך שבו שטח המגע בין החלקיקים גדול יותר. כך ניתן לראות כי מהירות גל הדחיסה המוחזר מקצה השרשרת גבוהה ממהירות הגל הראשוני ומהירות גל הריווח הראשוני הנע בשרשרת במצבה הדחוס ביותר היא הגבוהה ביותר ( $696\text{m/s}$ ).
- 2) מהירות האות בשרשרת דועכת בצורה חזקה ולא ליניארית בארבע עד חמש הדיסקות הראשונות בהמשך מתמתנת דעיכה זו.
- 3) אי הפעלת עומס מוקדם על שרשרת הדיסקות יוצרת מצב שבו יתכנו מרווחים מזעריים בין הדיסקות. מרווחים אלה משפיעים על מהירות ההתקדמות של האות. מתוך הדמיה

- שנערכה נמצא כי מרווח של  $10\mu\text{m}$  יוצר הפרש של  $16\text{m/s}$  במהירות הממוצעת. מכאן הוחלט לבדוק את השפעת העומס הסטטי המוקדם על מהירות האות גם בצורה ניסויית.
- (4) עומס מוקדם אם הוא סטטי או דינמי (גל הדוחס את התווך בו ינוע אחר כך גל אחר) אחראי ליצירת שדה מאמצים אחיד יותר אחרי חזית הגל המתקדם (בהשוואה לשרשרת חופשית).
- (5) גידול בעומס הסטטי המוקדם מוביל לגידול במאמצים אחרי חזית הגל וכן לגידול במהירות הממוצעת. מתוך הניסוי ראינו כי העליה במהירות הממוצעת נמשכה עד לעומס מוקדם של  $0.6\text{bar}$ . אחרי שהגענו לערך זה הוספת עומס סטטי נוסף כמעט ואינה משנה את המהירות.
- (6) המהירות הממוצעת של האות גדלה עם העליה בקוטר הדיסקות מ-  $10\text{mm}$  ל-  $40\text{mm}$ . גם דעיכת האות ופיזורו הושפעו באותה צורה.
- (7) עבור דיסקות קטנות יחסית (כתלות בתכונות החומר השונות. דיסקות בקוטר  $10\text{mm}$  במקרה זה) התקבלה הגברה של האות לפני שהוא התחיל לדעוך.
- (8) גידול בצפיפות החומר ממנו עשויות הדיסקות גורר ירידה במהירות ממוצעת של האות בתחום שבין  $310\text{kg/m}^3 > \rho > 4960\text{kg/m}^3$ . גידול נוסף בצפיפות מעבר לערך זה הראה ירידה חדה בקצב שינוי המהירות. מגמה דומה נצפתה עם הגידול בצפיפות גם עבור הגידול בדעיכה ובפיזור.
- (9) כמו עבור הקטרים השונים גם כאן התקבלה הגברה של האות באחת השרשראות, אלה שהפעם מדובר בדיסקות בעלות הצפיפות הנמוכה יחסית ( $\rho=310\text{kg/m}^3$ ).
- (10) עבור קוטר דיסקות שונה וצפיפות חומר שונה ראינו סימנים לכך שבשרשרת ישנם גבולות לערך המהירות הממוצעת. עבור קוטר דיסקות נמצא גבול עליון ועבור צפיפות החומר נמצא גבול תחתון. נראה כי גבולות אלה תלויים ביחס שבין אורך האות וקוטר הדיסקה. נכון למחקר זה נראה כי ככל שיחס זה קטן ומתכנס המהירות קרובה יותר למהירות הגבולית בשרשרת. ניתן לציין כי בחקירה זו ערך היחס שבו ראינו התכנסות היה בסביבות שלושה קטרי דיסקה. ערך זה תואם לתוצאות מהספרות המדווחות על ערכים של שלושה עד חמישה קטרים.
- (11) חקירה זו של מאפיינים שונים של רכיבי התווך הגרגרי היא דוגמה ליכולת של התוכנה והמודל לשמש לחקירת תכונות חלקיקים המתאימים ליישומים שונים ובהם גם מיגון מבנים. אם נזכור כי עבור מיגון יעיל נדרש כי התווך הגרגרי יגרום לדעיכה חזקה ומהירה של האות המלווה גם בפיזור רב, נוכל למצוא מתוך המאפיינים שנבחנו כי חלקיק בעל קוטר גדול, קשיחות נמוכה וצפיפות גבוהה יענה בצורה הטובה ביותר על דרישות אלה.
- (12) אותות כניסה ארוכים מתפרקים לאותות קצרים יותר בתהליך הכרוך בסידור מחדש של האנרגיה באות. תופעה זו נצפתה בניסוי שנערך במעבדה על ידי (Glam(2004) וכן

- בניסויים שונים המדווחים בספרות. הבנה נרחבת יותר על המנגנון המכני היוצר את הפירוק טרם הושגה.
- (13) במסגרת הפירוק ראינו כי האותות החדשים שנוצרים אחרי הפירוק יוצרים הגברה של הכוח בכניסה לשרשרת לפני שהם מתחילים לדעוך.
- (14) האות בעל האמפליטודה הגדולה יותר אחרי הפירוק (האות הראשון בהדמיה) מתקדם בשרשרת ללא פיזור.
- (15) מתוך משך הזמן של האותות אחרי הפירוק הצלחנו ליצור אות כניסה קצר שהפך לאות המתקדם לאורך למעלה משבעים דיסקות ללא פיזור. זהו כנראה האות בעל האורך האופייני בשרשרת.
- (16) עבור אותות המתקדמים באותה שרשרת, תחת אות העמסה קצר מתקבלת הדעיכה המשמעותית ביותר. כמו כן המהירות הממוצעת של התקדמות האותות תחת אות העמסה זה היא האיטית ביותר אך נציין כי ההבדלים במהירות אינם משמעותיים.
- (17) בחקירה זו התקבלה מדידה מדויקת של אות העמסה ששימשה גם להפעלת אות זהה בהדמיה. ראוי לציין כי לצורת המדרגה של אות העמסה בו השתמשנו ישנה השפעה על השינוי המאובחן בצורת האות בתחילת תנועתו, מאחר ולא יתכן כי השרשרת תעביר אות בעל עליה וירידה חדים כמו באות זה. ההשפעה של צורות אות הכניסה השונות על צורת הגל המתקדם לא נחקרה עדיין בצורה השוואתית.
- מתוך התוצאות המתארות את המתרחש לאחר שגל הים שנוצר בניקבת ההלם פגע בתווך המוצק ניתן גם לתאר את התהליך שראינו בקוים כלליים יותר:
- (1) בתחילת התנועה עובר כל אות תהליך של שינוי המתאים אותו לתנועה בשרשרת. שינוי זה מתרחש בעיקרו בעשר הדיסקות הראשונות ואחר כך הוא נחלש והופך הדרגתי יותר.
- (2) השינוי באות תמיד מלווה בירידה במהירות הממוצעת שלו.
- (3) תהליך השינוי כולל בדרך כלל התרחבות של האות (פיזור) אך יתכן שהאות יתקדם גם ללא שינוי צורה. כאשר מתרחשת התרחבות היא מלווה בדרך כלל בדעיכה של אמפליטודת האות ביחס לאמפליטודה שלו בכניסה. במקרה של התאמה טובה יותר בין האות בכניסה לאורך האות המתקדם בשרשרת השינוי בצורת האות מועט (התרחבות קלה) ויתכן שנקבל עליה באמפליטודה.
- (4) לכל שרשרת אורך אות אופייני המתקדם בה ללא שינוי צורה משמעותי. כאשר האות בכניסה ארוך ביחס לאורך האות האופייני הוא עובר התפרקות לאותות קצרים יותר. האות הגדול יותר אחרי ההתפרקות ינוע מהר יותר משאר האותות והאמפליטודה שלו תגדל ביחס לאמפליטודה בכניסה. אות זה כמעט ואינו עובר פיזור. תופעה זו שנצפתה גם בספרות מצביעה על כך שהשרשרת היא מעין פילטר לאורכי גלים מסוימים.

5) חשוב לציין כי התהליכים העוברים על האות מושפעים גם מתנועתו בתוך גוף הדיסקות וגם מתנועתו דרך המגעים שבינהן.

קיימות מספר תופעות שהופיעו בניסוי אך לא נצפו בהדמיה. בין תופעות אלה ניתן למנות את:

1) הפירוק של האות המקורי לאותות קצרים חזק יותר (תנודות גדולות יותר) בניסוי.  
 2) בניסויים שונים, לא תמיד האות בעל האמפליטודה הגדולה ביותר הוא הראשון אחרי ההתפרקות. באופן כללי ניתן לומר כי הפירוק שעובר האות בהדמיה מסודר (אידיאלי) הרבה יותר.

3) דעיכת האות בניסוי מביאה את המערכת למצב סטטי אחרי כ-5ms תופעה זו אינה מושגת בהדמיה בעזרת הריסון בו נעשה שימוש.

4) התכנסות ערך המהירות הממוצעת הנצפה בניסוי עם הגידול בעומס הסטטי המוקדם, לא באה לידי ביטוי בהדמיה שבוצעה באמצעות המודל בו השתמשנו. כזכור מודל זה עשה שימוש במגע רך ובאלגוריתם מגע המאפשר חדירה בין הגופים. ניתן לציין כי בדיקה נוספת הראתה כי בעת שימוש במגע קשיח יותר תופעה זו מתקבלת גם בהדמיה. מספר הערות על אופן העבודה כוללות בראש ובראשונה את הצורך לעבוד להבא עם שרשראות ארוכות יותר גם בניסוי וגם בהדמיה. בנוסף מומלץ להקפיד, בעת בדיקת מאפיין מסוים על אותות כניסה זהים לשרשרת ולא לאימפקטור. ביצוע המלצה זו מונע את השפעת האימפקטור על האות ומקל בעת ניתוח התוצאות. ראוי גם להזכיר את הדרך לבדיקת הפיזור של האות על ידי נרמולו על פי ערכו המרבי בנקודות המגע הרצויות. שיטה זו מנטרלת השפעת אלמנטים נומריים המשפיעים על צורת האות.

לגבי שיטות המחקר באופן כללי חשוב לדעת כי השיטה הפוטואלסטית גוזלת משאבי זמן רבים בעת ניתוח התוצאות ולאור השגיאה המתקבלת יש לשקול את השימוש בה אם ניתוח התוצאות לא נעשה בצורה ממוחשבת. לגבי הקוד הנומרי ראוי לציין כי העבודה עם תוכנה העושה שימוש בשיטת האלמנט הסופי תוך הדמית כל החלקיק, מוגבלת לטיפול במספר חלקיקים קטן יותר מאשר כאלה העושות שימוש באלמנטי קורה או שיטות המתייחסות לחלקיק כגוף קשיח. מכאן שיש חשיבות רבה בקביעת מטרת ההדמיה לפני הבחירה בצורת הפתרון הנומרי. חשוב כמובן לציין כי למרות שנראה שחוק המגע שהושג מהתוכנה ענה על מרבית הציפיות, זהו עדיין קוד מסחרי סגור ועל מנת לכתוב חוק מגע על פי דרישות המשתמש יש צורך ביכולת הפעלה גבוהה יותר מזו של משתמש מתחיל.

חשוב לזכור כי עבודה זו מוגבלת מאד לצורת הסידור ולסוג החומר בו השתמשנו. החשיבות בקביעת תכונות החומר הנכונות והמאפיינים הנכונים לכיול המודל חזרו ועלו לאורך כל העבודה. מכאן שמעבר לחומר אחר או סידור אחר מצריכים כיוול מחדש של המאפיינים (תהליך זה נכון כנראה לכל השיטות הנומריות).

- ABAQUS, Version 6.3, Hibbit, Karlsson and Sorensen, Inc. (2002).
- Bardenhagen, S.G., Guilkey, J.E., Roessig, K.M., Brackbill, J.U., Witzel, W.M. and Foster, J.C. (2001) An improved contact algorithm for the material point method and application to stress propagation in granular material. *CMES*, **2**, 509-522.
- Britan, A., Ben-Dor, G., Elperin, T., Igra, O. and Jiang, J. (1997) Mechanism of compressive stress formation during weak shock waves impact with granular materials. *Exp. Fluids*, **22**, 507-518.
- Britan, A., Ben-Dor, G., Igra, O. and Shapiro, H. (2001) Shock waves attenuation by granular filters. *Int. J. Mult. Flow* **27**, 617-634.
- Durelli, A.J. and Riley, F.W. *Introduction to Photoelasticity*, (1965) Prentice-Hall, N.J, USA.
- Durelli, A.J. and Shukla, A. (1983) Identification of isochromatic fringes. *Exp. Mech.* **23**, 111-119.
- Dally, J.W. and Riley, F.W. *Experimental Stress Analysis*, (1978) McGraw-Hill Kogakusha, Tokyo, Japan.
- Glam, B. *Experimental investigation of the interaction of a shock wave with a chain of photoelastic disks* (2004) M.Sc. Thesis, Ben-Gurion University of the Negev
- Hong, J. (2002) Slow dynamical behaviors of the propagating signal in granular chain under gravity, *PHYSICA A*, 315, 187-193.
- Iida, K., Velocity of elastic waves in a granular substance, (1939) *Earthquake Res. Inst.*, (Tokyo) **17**, 783.
- Johnson, K.L. *Contact Mechanics*, (1985) Cambridge university press, Great Britain.
- Moresi, L., Muhlhaus, H. and Dufour, F. (2001) An overview of numerical methods for Earth simulations. In "Exploration Geodynamics Chapman Conference", Dunsborough, 19-24 August, 2001, pp. 113-119.
- Nesterenko, V.F. *Dynamics of heterogeneous materials*, Springer-Verlag, NY, 2001.
- Nesterenko, V.F. (1983) Propagation of nonlinear compression pulses in granular media, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **24**, 733-743
- Radeke, C., Glaser, H. and Stoyan, D. (2002) Force distribution analysis in loaded planer disc systems by means of FEM. *Granular Matter*, **4**, 71-76.
- Sadd, M.H., Shukla, A., Mei, H. and Zhu, C. (1989) The effect of voids and inclusions on wave propagation in granular materials. *Micromechanics and Inhomogeneity- The Toshio Mura Anniversary Volume*, Editors G.J.Weng et al., Springer Verlag, pp 367-383.
- Sadd, M.H., Qiu, W., Boardman, W.G. and Shukla, A. (1992) Modeling Wave Propagation in Granular Media Using Elastic Networks. *Int. J. Rock Mech. and Mining Sci.*, **29**, 161-170.
- Sadd, M.H., Tai, Q. and Shukla, A. (1993) Contact law effects on wave propagation in particulate materials using distinct element modeling. *Int. J. Non Linear Mech.* **28**, 251-265.
- Smith, J.O. and Liu, C.K. (1953) Stresses due to tangential and normal loads on an elastic solid with application to some contact problems. *Trans. ASME, series E, Journal of Applied Mechanics*, **20**, 157.
- Shukla, A. and Rossmannith, H.P. (1982) Photoelastic investigation of dynamic load transfer in granular media. *Acta Mechanica* **42**, 211-225.
- Shukla, A. and Nigam, H. (1985) A numerical experimental analysis of contact stress problem. *J. Strain Analysis*. **20**, 241-245.

- Shukla, A. and Rossmannith, H.P. (1986) Dynamic photoelastic investigation of wave propagation and energy transfer across contacts, *J. Strain Analysis*, **21**, 213-218.
- Shukla, A. and Damania, C. (1987) Experimental investigation of wave velocity and dynamic contact stresses in an assembly of discs. *Exp. Mech.* **27**, 268-281.
- Shukla, A., Zhu, C. and Sadd, M.H. (1988) Angular dependence of dynamic load transfer due to explosive loading in two dimensional granular aggregates. *J. Strain Analysis* **23**, 121-127.
- Shukla, A. and Zhu, C. (1988) Influence of the Micro structure of Granular Media on Wave Propagation and Dynamic Load Transfer. *J. Wave Material Interaction* **3**, 249-265.
- Shukla, A., Sadd, M.H. and Mei, H. (1990) Experimental and computational modeling of wave propagation in granular media. *Exp. Mech.* **4**, 377-381.
- Shukla, A., Zhu, Y. and Xu, Y. (1992) Dynamic stresses in granular assemblies with microstructural defects. *J. Eng. Mec.*, **118**, 190-203.
- Shukla, A., Sadd, M.H., Singh, R., Tai, Q. and Vishwangthan, S. (1993a) Role of Particle Shape and Contact Profile on the Dynamic Response of Particulate Materials. *J. Optics and Lasers in Eng.* **19**, 99-119.
- Shukla, A., Sadd, M.H., Xu, Y., and Tai, Q. (1993b) Influence of loading pulse duration on dynamic load transfer in a simulated granular medium. *J. Mech. Phys. Solids.* **41**, 1795-1808.
- Sulsky, D., Zhou, S.J. and Schreyer, H.L. (1995) Application of a particle-in-cell method to solid mechanics. *Comput. Phys. Commun.* **87**, 236-252.
- Timoshenko, S.P. and Goodier, J.N. *Theory of Elasticity*, (1970) 3rd Edn. McGraw-Hill New-York *et al.*, Kogakusha, Tokyo, Japan.
- Xu, Y. and Shukla, A. (1990) Stress wave velocity in granular medium. *Mechanics Research Communications* **17**, 382-391.
- Zhu, Y., Sienkiewicz, F., Shukla, A and Sadd, M.H. (1997) A Comparison of explosively generated pulse propagation in assemblies of disks and spheres. **123**, 1050-1059.

## ניספח א חישוב תכונות החומר

התכונות הפוטואלסטיות של החומר (PSM-9) נבדקו במעבדה באמצעות ניסוי כיוול סטטי על ידי (2004) Glam. בסוף הבדיקה התקבל הקבוע הפוטואלסטי כפי שהוא מופיע בטבלה 2.

התכונות המכניות של החומר התקבלו מחישוב שבוצע בהסתמך על נתונים שהתקבלו מבדיקה של מהירויות הגלים בחומר. מהירות הגל האורכי וגל הגזירה נמדדו בפלטת PSM-9 באמצעות 5072PR Panamatrix Ultrasonic Pulser-Receiver. התוצאות שהתקבלו הן :

$$c_l = c_1 = 2.62 \pm 0.01 \frac{km}{s}$$

$$c_s = c_2 = 1.16 \pm 0.03 \frac{km}{s}$$

מתוך תורת האלסטיות נתונים:

מודול האלסטיות בגזירה:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (1.א)$$

ומודול ההתפשטות הנפחית (bulk modulus):

$$k = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (2.א)$$

כאשר E הוא מודול האלסטיות (מודול יאנג) ו  $\nu$  הוא יחס פואסון.

כעת ניתן לקשור בין מהירויות הגלים לתכונות החומר על ידי הקשרים עבור התקדמות גלים בתווך אלסטי ליניארי איזוטרופי רציף (משוואה 1.2.3 ו 1.2.5):

$$c_l = c_1 = \sqrt{\frac{k + \frac{4}{3}G}{\rho}} \quad (3.א)$$

$$c_s = c_2 = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

כאשר  $\rho$  הוא צפיפות החומר.

נגדיר כי  $\alpha = \left(\frac{c_l}{c_s}\right)^2$  ונקבל מתוך חלוקת הביטויים במשוואה (3.א) ביטוי ליחס פואסון:

$$\nu = \frac{\alpha - 2}{2(\alpha - 1)} \quad (4.א)$$



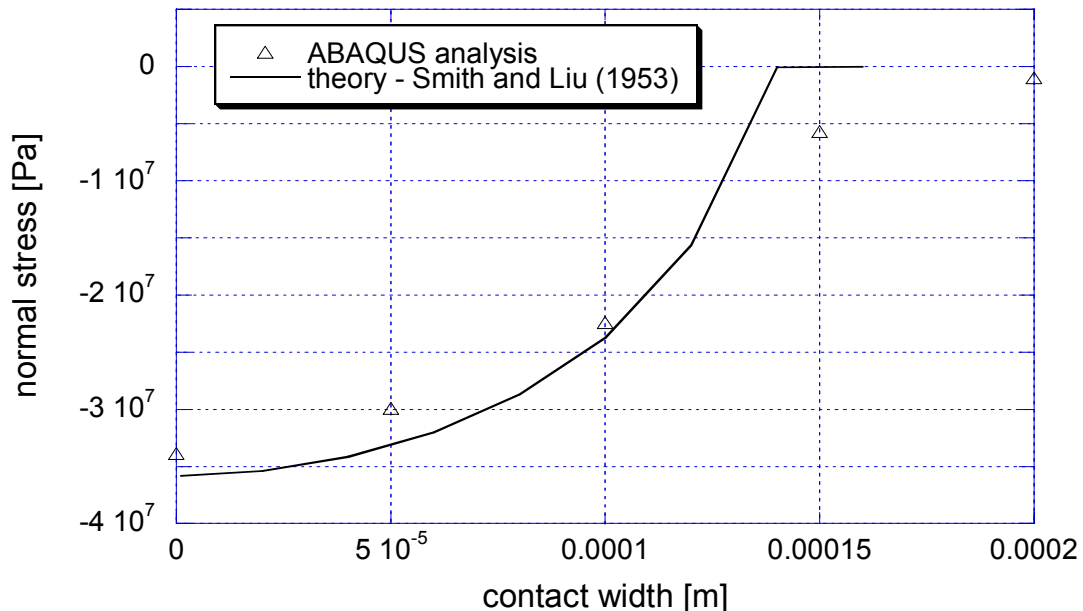
כעת ניתן להציב את (א.1) ו (א.2) לביטוי עבור  $c_1$  מתוך (א.3) ולקבל ביטוי עבור E:

$$E = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)\rho}{(1-\nu)} (c_1)^2 \quad (\text{א.5})$$

מתוך (א.4) ו (א.5) התקבלו התוצאות שבטבלה 2.

## ניספח ב בדיקת התאמה בין המודל הנומרי לתוצאות אנליטיות.

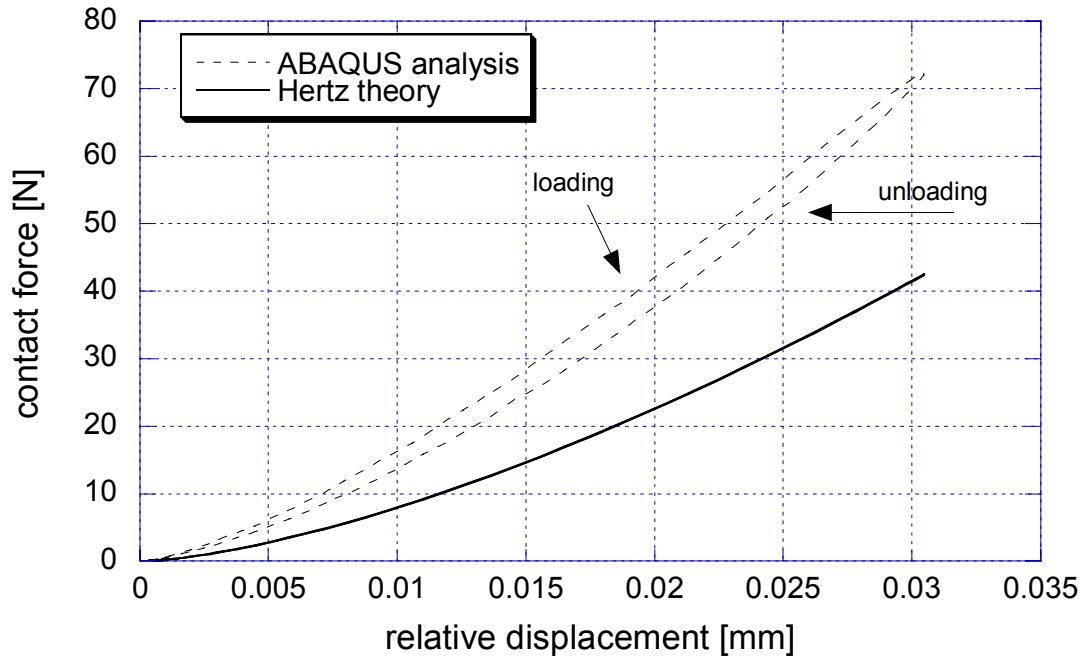
כפי שנאמר בסעיף 3.2 נבדק המודל הנומרי תחת העמסה סטטית אל מול תוצאות אנליטיות. לצורך ההשוואה השתמשנו במשוואות שדה המאמצים אותם פיתחו Liu ו Smith (1953) מתוך התיאוריה של Hertz. נזכיר כי משוואות אלה מכילות התייחסות גם לכוח המשיקי באזור המגע, אך שבמקרה זה הוא שווה לאפס. נוסף גם בניגוד למשוואות של Hertz משוואות אלה נותנות ערך אינסופי עבור הנקודה  $x=0$  (מרכז אזור המגע) אך מצד שני הן נותנות ערכים ממשיים גם מחוץ לאזור המגע. באיור ב-1 ניתן לראות את פילוג המאמץ הנורמלי על חצי מרוחב המגע (b), כפי שהוא מתקבל מתוך הדמיה עם המודל בו נעשה שימוש בעבודה. בנוסף ניתן גם לראות את הפילוג לפי התיאור האנליטי (משוואה 2.1.10)



איור ב-1 השוואת פילוג המאמץ הנורמלי בין ההדמיה לחישוב אנליטי תחת העמסה סטטית.

ניתן לראות כי באופן כללי צורת הפילוג דומה מאד, כאשר ההבדל העיקרי בא לידי ביטוי במעבר החד של המאמץ בקצה אזור המגע המתואר במשוואות אך לא בא לידי ביטוי בהדמיה. בדיקה קצרה העלתה כי עבור המאמץ המרבי ישנו הבדל של 5% בין הפתרונות. בדיקה נוספת של השטח תחת העקומות, הראתה גם כן כי ההבדל בסך כל המאמץ אינו עולה על 5%. ניתן לציין כי המקרה היחיד שבו הושגה התאמה טובה יותר של הפילוג באזור המעבר היתה כאשר רשת החישוב הכילה אלמנטים בעלי שישה צמתים אך רשת זו לא נבחרה מטעמים של אי התאמה בין הצמתים.

תמונה נוספת שמעניין לראות כחלק מההשוואה היא זו של התלות בין הכוח המתפתח באזור המגע לתזוזה היחסית בין הגופים או חוק המגע בין הגופים. באיור ב-2 מוצגת השוואה של תלות זו בין תוצאות מתוך הדמיה דינמית של שרשרת תחת אות כניסה באורך 0.07ms לתוצאות אנליטיות מתוך התיאוריה של Hertz (משוואה 2.1.9). הגיאומטריה, תכונות החומר והכוחות המופעלים זהים בשני המקרים.



איור ב-2 השוואת חוק המגע בין ההדמיה לחישוב אנליטי.

מאיור זה ניתן לראות מספר תופעות. חוק המגע מההדמיה הדינמית מציג אמנם אופי לא ליניארי קשיח יותר אך למרות זאת הוא דומה מאד באופיו לחוק האנליטי שפותח עבור מצב סטטי. ההבדל הקיים בהדמיה בין העמסת הכוח ופריקתו מצביע כנראה על מעט היסטריזיס. חשוב לציין כי ההזזה היחסית נמדדה בין שתי נקודות במרכז שתי דיסקות סמוכות ויתכן כי בצורה כזו לא מבודדת התופעה הנובעת מאזור המגע. מצד שני בל נשכח שהתנהגות החומר במודל ליניארית לחלוטין ולא צריכה להיות לה השפעה מרובה. נקודה נוספת שיש לציין היא שיתכן כי לתופעה זו ישנה השפעה על העובדה שעם ההתקדמות בשרשרת, זנב הגל הופך פחות ופחות חד [איור 25(א)]. לסיום נציין כי בהדמיה קיבלנו כי מעריך חזקה של 1.465 לעומת ה-1.5 המפורסם אצל Hertz.

## ניספח ג' פעולת הקוד הנומרי ABAQUS/Explicit בעת העמסה דנמית ובעת פתרון בעיות מגע.

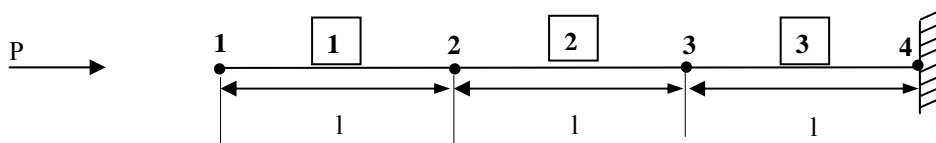
נספח זה מחולק לשני חלקים כאשר בחלק הראשון נראה בקצרה את אופן החישוב הדינמי של ה Explicit (Ex.) ובחלק השני נציג את אלגוריתם המגע בו נעשה שימוש לפתרון הבעיה.

### כללי

הליך ה Ex. בתוכנה הוא הליך שבו נפתרות המשוואות בצורה מפורשת והוא הליך יעיל מאד לפתרון מגוון רחב של בעיות אי-ליניאריות במוצקים. יתרונו הגדול של ה Ex. הוא החיסכון הגדול הנובע מכך שלא סט משוואות שלם צריך להיפתר בכל צעד וכך מושג חיסכון גדול בזמן חישוב. בדרך כלל משלם ה Ex. על החיסכון שבפתרון המשוואות בצורה מפורשת בצורך להשתמש בצעדי זמן קטנים מאד בכדי לעקוב אחרי השינויים הקטנים בפתרון. בחירת צעד הזמן תלויה רק בתדר העצמי הגבוה ביותר במודל. ה Ex. עקב יתרונותיו הוא הליך חישוב עדיף בבעיות של התקדמות גלים וכן קל יותר להביע בעזרתו את התנאים באנליזות הכרוכות בבעיות מגע.

### חישוב של התקדמות גל מאמץ

נביט בגל מאמץ המתקדם לאורך מוט המחולק לשלושה אלמנטים באורך התחלתי  $l$  כל אחד.



איור ג - 1 מצב התחלתי של מוט חד ממדי לפני הפעלת כוח מרוכז  $P$  בקצהו החופשי.

ניתן להציג את סדר החישוב בצורה כללית בכל צעד זמן באופן הבא:

חישובים בצמתים:

ראשית יש למצוא את התאוצות בצמתים בצעד הזמן הנוכחי מתוך משוואת שיווי המשקל הדינמי:

$$\ddot{u}|_{(t)} = M^{-1} \cdot (P - I)|_{(t)} \quad (1.ג)$$

כאשר  $M$  היא מטריצת המסה של הצמתים  $P$  הכוחות החיצוניים ו  $I$  הכוחות הפנימיים.

בשלב הבא מבוצעת אינטגרציה נומרית בזמן באמצעות שיטת הפרשים המרכזיים והשינוי במהירות מחושב בהנחה כי התאוצה קבועה. השינוי במהירות מתוסף למהירות באמצע צעד זמן הקודם לקביעת המהירות באמצע צעד הזמן הנוכחי.

$$\dot{u} \Big|_{\left(t+\frac{\Delta t}{2}\right)} = \dot{u} \Big|_{\left(t-\frac{\Delta t}{2}\right)} + \frac{(\Delta t |_{(t+\Delta t)} + \Delta t |_{(t)})}{2} \ddot{u} \Big|_{(t)} \quad (2.ג)$$

כעת עוברות המהירויות אינטגרציה בזמן והתזוזות המתקבלות מתוספות לתזוזות בתחילת צעד הזמן הנוכחי לקביעת התזוזה בסוף הצעד הנוכחי.

$$u \Big|_{(t+\Delta t)} = u \Big|_{(t)} + \Delta t \Big|_{(t+\Delta t)} \dot{u} \Big|_{\left(t+\frac{\Delta t}{2}\right)} \quad (3.ג)$$

חישובים באלמנטים:

כאשר ידועות המהירויות ניתן כאמור לחשב את שינוי המעוותים באלמנטים  $d\varepsilon$  מתוך קצב המעוותים  $\dot{\varepsilon}$ . בשלב הבא מחושבים המאמצים באלמנט מתוך המשוואות הקונסטטיטוביות

$$(4.ג) \sigma_{(t+\Delta t)} = f(\sigma_{(t)}, d\varepsilon)$$

ולבסוף מחושב הכוח הפנימי על הצמתים  $I_{(t+\Delta t)}$ .

לדוגמא, בצעד הזמן השני באנליזת המוט שבאיור ג-1 איור יחושב קצב המעוות באלמנט 1 לפי:

$$\dot{\varepsilon}_{el1} = \frac{\dot{u}_2 - \dot{u}_1}{l} \quad (5.ג)$$

כאשר האינדקסים 1,2 מתייחסים לצמתים 1 ו 2. השינוי במעוות והמעוות החדש יחושבו לפי:

$$d\varepsilon_{el1} = \int \dot{\varepsilon}_{el1} dt \Rightarrow \varepsilon_{el1} = \varepsilon_{el1}^{old} + d\varepsilon_{el1} \quad (6.ג)$$

המאמץ יחושב לפי חוק Hooke :

$$\sigma_{el1} = E\varepsilon_{el1}$$

כעת ניתן לחשב את הכוחות הפנימיים מידיעת שטח החתך של המוט A:

$$I_{el1} = \sigma_{el1} A \quad (7.ג)$$

בשלב זה הופכים את  $t$  ל  $t+\Delta t$  ומתחילים מחדש.

### בחירת צעד הזמן

גבול היציבות הוא זה שקובע את גודל צעד הזמן והוא תלוי בתדירות הגבוהה ביותר במודל. היות ולעיתים קשה לחשב תדירות זו מחשב ה Ex. את התדירות בכל אלמנט. נמצא כי התדירות הגבוהה ביותר מתוך האלמנטים תהיה גבוהה יותר מהתדירות הגבוהה ביותר בגוף כולו וכך נקבל גישה יעילה ושמרנית יותר.

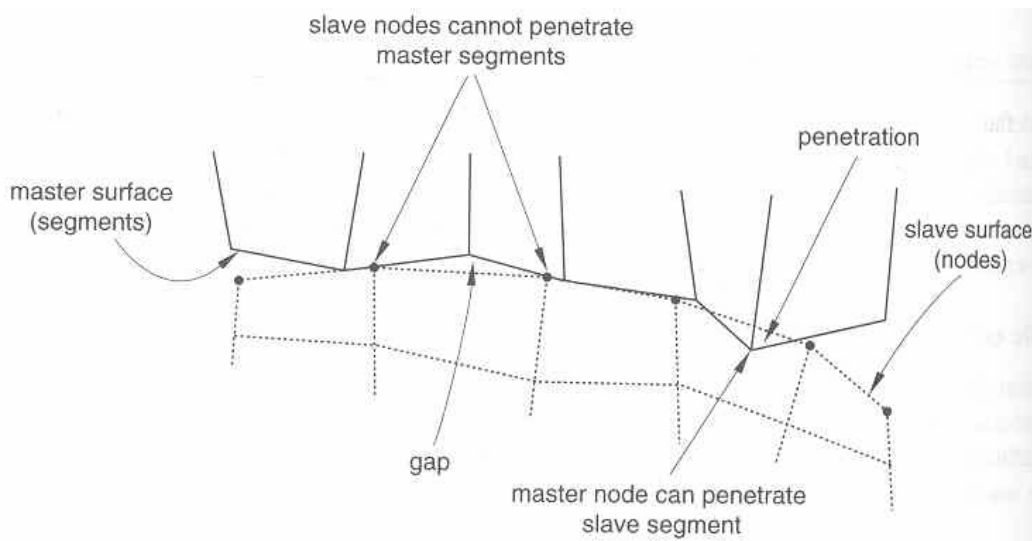
צעד הזמן יוגדר עם כן מהיחס בין אורך האלמנט הקטן ביותר  $L^e$  ומהירות הגל בחומר  $c_d$  :

$$\Delta t_{stable} = \frac{L^e}{c_d} \quad (8.ג)$$

### אנליזת המגע

פתרון בעיות מגע בתוכנות נומריות כרוך בראש ובראשונה בצורך ליצור מצב שבו הצמתים במשטח אחד המשתתף במגע יחדרו בצורה מינימלית או לא יחדרו בכלל אל תוך המשטח השני. כאן בא לידי ביטוי אלגוריתם המגע שאמור למנוע חדירה זו וליצור הגדרה מדויקת עד כמה שאפשר של קשר המגע. היות ועבודת אלגוריתם המגע צורכת משאבי מחשב רבים ישנה עדיפות להגדרה מדויקת עד כמה שאפשר של המשטחים המשתתפים במגע.

אלגוריתם המגע בו נעשה שימוש בעבודה זו נקרא penalty contact algorithm. זהו אלגוריתם האוכף בצורה מעט גמישה את מגבלות המגע ולכן הוא מאפשר טיפול במגוון רחב של בעיות מגע. האכיפה הגמישה באה לידי ביטוי בכך שבין השאר האלגוריתם מאפשר חדירה בין הגופים למרות שלרוב היא אינה משמעותית. כמו ברבות מהשיטות המטפלות במגע, גם אלגוריתם זה כרוך בהגדרת אחד ממשטחי המגע כ-master והגדרת המשטח השני כ-slave. השימוש בהגדרה מסוג זה דורש גם קביעה של משקל היחס בין המשטחים וכך יקבע מי מהמשטחים יכול לחדור את שכנו בזמן החישוב. מצב של יחס טהור בין ה-master ל-slave מוצג באיור ג-2. במצב זה ישנה אפשרות שה-master יחדור אל ה-slave אך לא להיפך. כך ניתן גם להגדיר משקל שונה ליחס בין המשטחים כאשר בקצה השני מהיחס הטהור ניתן להגדיר יחס מאוזן. חשוב לדעת כי לא בכל קשר של מגע בין שני משטחים ניתן להגדיר את כל סוגי היחסים.



איור ג - 2 חדירה של משטח ה-master אל תוך משטח ה-slave עקב הבדדה לקויה.

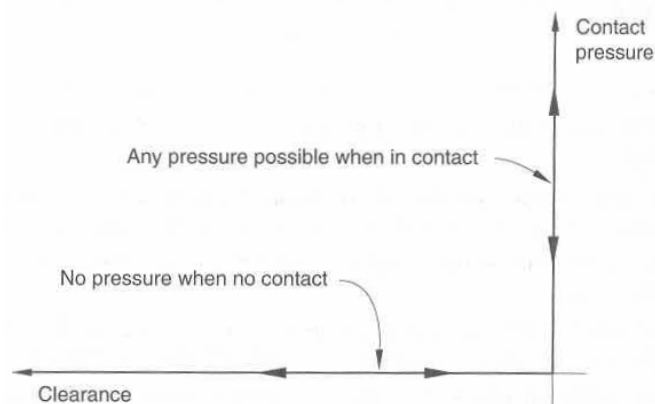
עבור יחס טהור מאפשר האלגוריתם בתחילת הצעד תנועה של הגופים ללא הפרעה הכוללת גם חדירה הדדית. כעת מחפש האלגוריתם איזה צומת של משטח ה-slave חדרה למשטח ה-master. באמצעות מכפלה בין מרחק החדירה של הצומת וקשיחות הקפיץ (כאילו הונח קפיץ בין הצומת ומשטח ה-master), מחושב כוח ההתנגדות שיש להפעיל על הצומת בכדי למנוע את החדירה. כוח זה והפוך בכיוונו מופעל גם על משטח ה-master באזור החדירה, כוח זה הוא גם כוח המגע. במקרה ש ה-master הוא משטח של אלמנטים הכוח מחולק בין הצמתים של האלמנטים בהם בוצעה החדירה. בסוף הצעד יתכן כי עדיין קיימת חדירה לא משמעותית בין הגופים. קשיחות הקפיץ נקבעת כברירת מחדל על ידי התוכנה כך שהמגע יהיה קשיח. הקשיחות נקבעת כך שצעד הזמן בחישוב יהיה מינימלי והחדירה בין הגופים לא תהיה משמעותית במהלך ההדמיה. המשתמש יכול לשנות באופן עקיף את קשיחות הקפיץ אך שינוי זה בקשיחות עלול להקטין מאד את צעד הזמן בחישוב.

כאשר מדובר במגע של שני משטחים המורכבים מאלמנטים ניתן להגיע למצב של יחס מאוזן בין ה-master ל-slave. במצב זה בודק האלגוריתם פעמיים מצב של יחס טהור, כאשר כל משטח משמש פעם כ-master ופעם כ-slave. כוח המגע נקבע כשילוב ליניארי של התוצאות.

כאשר משתמשים באלגוריתם מגע 'קשה' (hard penalty contact) ומוגדר יחס טהור בין ה-master ל-slave עדיין ישנה אפשרות שתהיה חדירה של ה-master. עידון הרישות על משטח המגע של ה-slave עלול למנוע תופעה זו.

### **קשר מגע 'קשה' (hard contact)**

קשר זה המוצג באיור ג-3 קובע כי כאשר המרווח בין משטחי המגע גדול או שווה לאפס הלחץ ביניהם הוא אפס. כאשר ישנו מגע בין המשטחים יתכן ביניהם כל לחץ. כאשר הלחץ הוא אפס תתכן הפרדה (separation) של המשטחים.



איור ג – 3 קשר מגע 'קשה'- הקשר בין הלחץ למרווח במגע

## Abstract

The dynamics of the stress waves propagation in a single straight chain of disks was analyzed both experimentally and numerically. The shape and velocity change of the waves as they moved through the chain of disks under a dynamic stepwise pressure load were recorded and numerically simulated. The effects of the stress wave reflection from the chain boundaries, the influence of the disk's diameter, density, stiffness, the role of pre-stress, and the loading pulse duration, were examined numerically. In the experimental part, the pre-stress influence on the dynamics of the stress wave propagation was investigated in shock-tube experiments. The shock tube method provides normal and homogeneous impact conditions over a surface at the chain entrance. Characteristics of the input pulse (amplitude and profile) as well as the initial pre-stress applied on the chain can be easily varied in a wide range. An optical system composed of a YAG laser stroboscope, a polariscope and a CCD camera was used to photographically capture the stress wave propagation through the straight chain of photoelastic disks. The numerical investigation was conducted using the commercial code ABAQUS, which uses the finite element method. The numerical model consists of deformable disks and the definition of the contact between them includes mechanisms of contact stiffness and damping. The validity of the numerical model was verified by comparing the simulated contact force and strain history with those obtained in the experimental study conducted by Glam (2004). Fairly good agreement between the simulations and most of the experimental findings was obtained. Both the numerical and experimental results were used for analyzing pulse dispersion, and attenuation of the stress wave, and contact force. It was demonstrated that when an impulse loading is applied to a pre-stressed chain, uniform stress distribution behind the stress wave front is observed. When the initial pre-stress,  $p_{ps}$ , increases the final level of the stress within this area is also increased. The increase of the initial pre-stress affects also the average propagation velocity of the stress wave. However, this effect is significant only within the range of  $0.1\text{bar} < p_{ps} < 0.6\text{bar}$ . Further increase in the pre-stress hardly affects the stress wave velocity. The material density also affects the stress wave velocity. For denser materials,  $4960\text{kg/m}^3 > \rho > 310\text{kg/m}^3$ , the average velocity of the stress wave decreases, while for



higher values, additional increase in density negligibly affects the propagation velocity and pulse length. While the material density growth causes stronger dispersion and attenuation of the propagating pulse, in the chains of the lowest material density (depending on the chain properties),  $\rho=310\text{kg/m}^3$ , in our case, an initial amplification of the pulse was followed by a further attenuation. By comparing the numerical results with those available from the literature it was demonstrated that the numerical model predicts rather well the conditions when the input pulse propagates through the chain without significant dispersion. It was also shown that when the input pulse is long with respect to its length, the pulse splits to several shorter pulses. It was noted that some of these new pulses demonstrated amplification of the input force. Moreover, the longer the input pulse is, the higher is the pulse propagation velocity. Similarly, the larger is the disk diameter ( $10\text{mm}<D<40\text{mm}$ ) the higher are the pulse velocity, the dispersion and the attenuation of the pulse inside the disk chain. For sufficiently small disks (10mm diameter in our case) an amplification of the input force was observed only close to the chain entrance.

This successful investigation of the influence of different parameters on the wave propagation in the granular medium, demonstrate the basic capability of the numerical model to be used for further research of such characteristics for different applications of granular materials such as structures protection.



**BEN-GURION UNIVERSITY OF THE NEGEV  
FACULTY OF ENGINEERING SCIENCES  
DEPARTMENT OF MECHANICAL ENGINEERING**

***EXPERIMENTAL AND NUMERICAL  
INVESTIGATION OF THE INTERACTION OF A  
STRESS WAVE WITH A CHAIN OF  
PHOTOELASTIC DISKS***

Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements  
for the M.Sc. Degree

**BY: Avner Goldenberg**

SEPTEMBER 2004