



**אוניברסיטת בן גוריון בנגב  
הפקולטה למדעי ההנדסה  
המחלקה להנדסת מכונות**

**חקירה ניסויית של האינטראקציה של גל הלם עם שרשרת דיסקות  
פוטואלסטיות**

**חיבור זה מהווה חלק מהדרישות לקבלת תואר מגיסטר בהנדסה**

**מאת :**

**בנימין גלאם**



**אוניברסיטת בן גוריון בנגב**  
**הפקולטה למדעי ההנדסה**  
**המחלקה להנדסת מכונות**

**חקירה ניסויית של האינטראקציה של גל הלם עם שרשרת דיסקות**  
**פוטואלסטיות**

**חיבור זה מהווה חלק מהדרישות לקבלת תואר מגיסטר בהנדסה**

**מאת :**

**בנימין גלאם**

**מנחים :**

**ד"ר אלכסנדר בריטן**

**פרופ' גבי בן-דור**

**פרופ' עוזר איגרא**

_____ תאריך	_____ חתימת המחבר :
_____ תאריך	_____ אישור המנחה :
_____ תאריך	_____ אישור המנחה :
_____ תאריך	_____ אישור המנחה :
_____ תאריך	_____ אישור יו"ר ועדת מוסמכים מחלקתית

## תקציר

התקדמות גלים ומעבר עומס דינאמי דרך תווך חלקיקי נחקרו בשני העשורים האחרונים ע"י חוקרים שעסקו בתחומים שונים כגון חקר רעידות אדמה ומיגון מבנים תת קרקעיים נגד הים. במחקרים אלה נעשה שימוש בטכניקות שונות על מנת לפשט את חקר התווך הגרגרי, ביניהן דימוי התווך כמערך חד מימדי או דו מימדי של דיסקות גלילות.

במחקר זה נעשו ניסויים בנקבת הים אנכית ושרשרת ישרה של דיסקות בקוטר 20 מ"מ העשויות מאפוקסי שקוף. שדה המאמצים הדינאמי בנקודות המגע בין הדיסקות צולם בעזרת מערכת צילום שכללה לייזר, פולאריסקופ ומצלמות CCD. דיון בפרטי הניסויים, מערכת איסוף הנתונים ועיבודם בעזרת המחשב נעשה בהרחבה תחילה ולאחר מכן נותחו התקדמות גל המאמצים והחזרתו מגבולות תא הניסוי וזאת בהתבסס על תוצאות הניסויים הפוטואלסטיים והשוואתם עם אלו שהתקבלו ממדידי המעוות. התפרקות גל המדרגה הפוגע בשרשרת לסדרת גלים קצרים יותר והשפעת אורך השרשרת של הדיסקות נותחו אף הם.

*תודות . . .*

תודה לפרופ' גבי בן-דור, פרופ' עוזר איגרא וד"ר אלכסנדר בריטן שהנחו אותי בעבודה זו.

תודה מיוחדת לאבנר גולדנברג על הדיונים המועילים ולולאדימיר שלימק על העזרה הטכנית והעצות המקצועיות במהלך המחקר הניסויי.

*הצמודה מוקדשת למשפחתי ולאתי היקרה . . .*

מחקר זה מומן בתמיכתן הכספית של הקרן הלאומית למדעים במענק מחקר מספר 1-190\01 ושל הקרן הדו לאומית ישראל-ארה"ב במענק מחקר מספר 1999248.

# תוכן העניינים

I.....	תקציר
II.....	תודות
VI.....	רשימת איורים
IX.....	רשימת סימנים
1.....	1. מבוא וסקר ספרות
2.....	1.1. העמסה סטאטית
2.....	1.1.1 דסקה בודדת
3.....	1.1.2 סידורים דו מימדיים
3.....	1.2. העמסה דינאמית
5.....	1.2.1 סידור חד מימדי
5.....	1.2.1.1 השפעת הזווית על גל המאמץ
7.....	1.2.1.2 השפעת קוטר הדיסקה על גל המאמץ
10.....	1.2.1.3 השפעת גיאומטריית הדיסקה וחספוס אזור המגע על גל המאמץ
12.....	1.2.1.4 דיסקות עם מודול יאנג שונה
13.....	1.2.1.5 השפעת אורך גל ההעמסה על גל המאמץ
17.....	1.2.2 סידורים דו ממדיים
17.....	1.2.2.1 מבנה אקראי, HCP, BCC
20.....	1.2.2.2 השפעת חלל או הקשחה במבנה HCP
21.....	1.3 מודלים פיסיקאליים לתיאור גל מאמץ בתוך גרגרי
21.....	1.3.1 Distinct Element Method
22.....	1.3.2 Soliton Dynamics
23.....	1.4 סיכום
24.....	1.5 מוטיבציה לעריכת המחקר
25.....	2. רקע תיאורטי
26.....	2.1 פוטואלסטיות
26.....	2.1.1 רקע
27.....	2.1.2 פולאריסקופ
27.....	2.1.2.1 פולאריסקופ קווי (Linear Polariscopes)
29.....	2.1.2.2 פולאריסקופ מעגלי (Circular Polariscopes)
30.....	2.1.2.3 חישוב המאמצים עפ"י סדר פס

33.....	2.2 שדה המאמצים בדיסקה.....
33.....	2.2.1 פיתרון אנליטי של שדה המאמצים בדיסקה הנתונה להטחה סטאטית נורמאלית.....
35.....	2.2.2 תיאורית מאמצי המגע של הרץ (Hertz).....
38.....	2.2.3 חישוב כוח המגע עפ"י הרץ (Hertz).....
40.....	2.3 מדידת מעוותים בקרבת אזור המגע.....
40.....	2.3.1 רקע.....
42.....	2.3.2 התאמה של שיטת מעוותים לניסוי.....
43.....	2.3.2.1 בחירת מיקום המדיד.....
44.....	2.3.2.2 בחירת גודל המדיד.....
45.....	2.3.2.3 פינוי חום מהמדיד.....
46.....	2.3.2.4 זמן תגובת המדיד.....
46.....	2.3.2.5 מסקנות.....
47.....	3 מערכת הניסוי.....
47.....	3.1 נקבת ההלם.....
49.....	3.1.1 בדיקת הדירות גל ההלם.....
49.....	3.2 הדיסקות הפוטואלסטיות.....
50.....	3.3 תא הניסוי.....
51.....	3.4 ניסויים פוטואלסטיים-המערכת האופטית.....
51.....	3.4.1 רכיבי המערכת האופטית.....
51.....	3.4.1.1 מערכת הלייזר.....
51.....	3.4.1.2 פולאריסקופ מישורי/מעגלי.....
52.....	3.4.1.3 מערכת הצילום.....
52.....	3.4.2 מערכת ניסוי פוטואלסטי.....
54.....	3.5 ניסויים עם מדידי מעוות.....
54.....	3.5.1 מדיד המעוות.....
54.....	3.5.2 מגבר למדיד המעוות.....
55.....	3.5.3 איסוף הנתונים.....
56.....	4 תוצאות ודיון.....
56.....	4.1 מהלך הניסוי.....
57.....	4.2 שרשרת של 11 דיסקות.....
57.....	4.2.1 אופן התקדמות הגל.....
62.....	4.2.2 מהירות הגל.....
65.....	4.2.3 צורת הגל.....

70.....	4.2.4	התפרקת הגל.....
73.....	4.2.5	הערכת המהירות לאחר התפרקת הגל.....
74.....	4.3	השפעת אורך השרשרת.....
74.....	4.3.1	שרשרת עם 22 דיסקות.....
74.....	4.3.1.1	מהירות הגל.....
75.....	4.3.1.2	צורת הגל.....
78.....	4.3.1.3	התפרקות הגל.....
79.....	4.3.2	שרשרת עם 3 דיסקות.....
81.....	4.4	הערכת השגיאה.....
81.....	4.4.1	השגיאה בחישוב כוח המגע עפ"י השיטה הפוטואלסטית.....
82.....	4.4.2	השגיאה במדידת המעוות.....
82.....	4.4.3	גל ההלם בנקבה.....
83.....	4.5	מסקנות.....
83.....	4.6	סיכום.....
84.....		רשימת מקורות.....
88.....		Abstract.....

## רשימת איורים

עמוד

2	איור 1.1 :	העמסה סימטרית של דסקה פוטואלסטית
2	איור 1.2 :	סידור של דיסקות מודבקות
4	איור 1.3 :	מסנן גרגרי
4	איור 1.4 :	תא נפץ
5	איור 1.5 :	העמסה דינאמית של דיסקות בזווית מגע של $0^\circ$
5	איור 1.6 :	העמסה דינאמית של דיסקות בזווית מגע של $25^\circ$
7	איור 1.7 :	גל המאמצים בנקודות מגע שונות בשרשרת ישרה
9	איור 1.8 :	מהירות גל המאמצים כתלות בקוטר דסקה
9	איור 1.9 :	אורך הגל כתלות בקוטר הדיסקה
9	איור 1.10 :	מהירות גל המאמצים כתלות ביחס בין אורך גל לקוטר דסקה
10	איור 1.11 :	ניסוי בדיסקות אליפטיות
11	איור 1.12 :	אזור המגע בין דיסקות מחוספסות
12	איור 1.13 :	שרשרת עם דסקת פלדה או PSM4
13	איור 1.14 :	אקדח גז
13	איור 1.15 :	גל העמסה שמשכו $90 \mu\text{sec}$
14	איור 1.16 :	גל העמסה שמשכו $200 \mu\text{sec}$
14	איור 1.17 :	גל העמסה שמשכו $650 \mu\text{sec}$
15	איור 1.18 :	משך הגל כתלות במרחק
15	איור 1.19 :	האמפליטודה המקסימאלית כתלות במרחק
17	איור 1.20 :	התקדמות גל המאמץ בסידור דו מימדי אקראי
17	איור 1.21 :	סידור BCC
18	איור 1.22 :	סידור HCP
18	איור 1.23 :	זווית המגע בין דיסקות
19	איור 1.24 :	פיצוץ בין שני טורים בסידור BCC
20	איור 1.25 :	חלל והקשחה
21	איור 1.26 :	סימון מערכת הצירים בסכימה
22	איור 1.27 :	הרכיב הניצב של כוח המגע
27	איור 2.1 :	פולאריסקופ קווי (מישורי)
28	איור 2.2 :	מעבר האור דרך הפולאריסקופ
30	איור 2.3 :	פולאריסקופ מעגלי
31	איור 2.4 :	התפתחות האיזוכרומטות עם העלאת העומס בדיסקה פוטואלסטית הנתונה להטחה ניצבת



32	איור 2.5 :	שילוב של איזוכרומטות בשדה שחור ובשדה לבן בדיסקה הנתונה להטחה ניצבת
33	איור 2.6 :	הסימנים הקשורים לתיאור שדה מאמצים בדיסקה תחת עומס סטאטי נורמאלי
35	איור 2.7 :	השוואה בין ניסוי סטאטי לתיאוריה
35	איור 2.8 :	התפתחות המאמץ בדיסקה בודדת בקוטר 20 מ"מ
36	איור 2.9 :	אזור מגע בין שני גופים
36	איור 2.10 :	רדיוסי העקמומיות של שני גופים המונחים האחד על גבי השני
40	איור 2.11 :	גשר ויטסטון
41	איור 2.12 :	מדידת מעוותי כפיפה בקורה בעזרת מדיד מעוות
43	איור 2.13 :	גרדיאנט המעוות באזור המגע
44	איור 2.14 :	שגיאת קריאה בתלות בגודל המדיד
48	איור 3.1 :	סכימת נקבת ההלם
48	איור 3.2 :	ברז פניאומאטי מהיר
48	איור 3.3 :	מתמר לחץ
48	איור 3.4 :	מגבר מטען למתמר הלחץ
49	איור 3.5 :	PSM 9 - החומר הפוטואלסטי ממנו יוצרו הדיסקות
50	איור 3.6 :	תא הניסוי
51	איור 3.7 :	מכשיר הלייזר
51	איור 3.8 :	בקרת הלייזר
51	איור 3.9 :	הפולאריסקופ
53	איור 3.10 :	Time Delay Generator
53	איור 3.11 :	סכימת הניסויים הפוטואלסטיים
54	איור 3.12 :	מדיד המעוות
54	איור 3.13 :	מגבר Vishay 2311 למדידי מעוות
55	איור 3.14 :	אוסצילוסקופ דיגיטאלי
58	איור 4.1 :	TSW-Transmitted Stress Wave
59	איור 4.2 :	RSW-Reflected Stress Wave
60	איור 4.3 :	TEW-Transmitted Expansion Wave
61	איור 4.4 :	REW-Reflected Expansion Wave
62	איור 4.5 :	מעוות מנורמל בנקודת המגע התחתונה
64	איור 4.6 :	דיאגרמת x-t
67	איור 4.7 :	כוח מגע מנורמל בין דיסקות 1-2 עפ"י נתוני המדידה הפוטואלסטית
67	איור 4.8 :	מעוות מנורמל בין דיסקות 1-2
68	איור 4.9 :	כוח מגע מנורמל בין דיסקות 4-5 עפ"י נתוני המדידה הפוטואלסטית
68	איור 4.10 :	מעוות מנורמל בין דיסקות 4-5
69	איור 4.11 :	כוח מגע מנורמל בין דיסקות 8-9 עפ"י נתוני המדידה הפוטואלסטית

69	איור 4.12 :	מעוות מנורמל בין דיסקות 8-9
71	איור 4.13 :	כוח מגע מנורמל בין דיסקות 1-2 עפ"י נתוני המדידה הפוטואלסטית בזמן מעבר ה TSW
71	איור 4.14 :	כוח מגע מנורמל בין דיסקות 4-5 עפ"י נתוני המדידה הפוטואלסטית בזמן מעבר ה TSW
71	איור 4.15 :	כוח מגע מנורמל בין דיסקות 8-9 עפ"י נתוני המדידה הפוטואלסטית בזמן מעבר ה TSW
72	איור 4.16 :	מעוות מנורמל בין דיסקות 1-2 בזמן מעבר ה TSW
72	איור 4.17 :	מעוות מנורמל בין דיסקות 4-5 בזמן מעבר ה TSW
72	איור 4.18 :	מעוות מנורמל בין דיסקות 8-9 בזמן מעבר ה TSW
73	איור 4.19 :	האמפליטודה המקסימאלית של גל ה TSW כתלות במרחק
76	איור 4.20 :	מעוות מנורמל בין דיסקות 4-5
76	איור 4.21 :	מעוות מנורמל בין דיסקות 11-12
77	איור 4.22 :	מעוות מנורמל בין דיסקות 12-13
77	איור 4.23 :	מעוות מנורמל בין דיסקות 15-16
78	איור 4.24 :	האמפליטודה המקסימאלית של גל ה TSW כתלות במרחק בשרשרת של 22 דיסקות
80	איור 4.25 :	מעוות מנורמל בין דיסקות 1-2
80	איור 4.26 :	מעוות מנורמל בין דיסקות 2-3
82	איור 4.27 :	מד הכוח

## רשימת סימנים

- שטח נגד	A
- פרמטרים המייצגים את הגיאומטריה במשוואות המגע של Hertz	A, B
- חצי רוחב אזור המגע	b
- מקדם החיכוך בין שני גופים במגע	$\beta$
- מהירות גל אורכית	$C_l$
- מהירות גל רוחבית	$C_s$
- קוטר דסקה	D
- שינוי בהתנגדות	$\delta$
- פרמטר המייצג את תכונות החומר במשוואות המגע של Hertz	$\Delta$
- תזוזה	$\Delta\delta$
- שינוי באורך הנגד	$\Delta l$
- מודול יאנג	E
- שגיאה בקריטריון הריבועים הפחותים	e
- מעוות	$\varepsilon$
- כוח אופקי	f
- קבוע פוטואלסטי	$f_\sigma$
- מודול גזירה	G
- גיגה פאסקל	GPa
- פקטור מדיד המעוות	G.F.
- עובי דסקה	h
- אורך גל	$\lambda$
- אורך	l
- מטר	m
- מילימטר	mm
- מגה פאסקל	MPa
- מיקרו	$\mu$
- נאנו	n
- פרמטרים במשוואות המגע של Hertz	M,N
- ניוטון	N
- אום	$\Omega$

מודול פואסון	$\nu$
כוח נורמאלי, הספק על הנגד	$P$
פאסקל	$P_a$
זוויות שבעזרתן מתארים את הכוח הסטאטי בדיסקה	$\varphi, \theta_1, \theta_2$
מתמרי לחץ	$P_1, P_2, P_3$
כוח ליחידת רוחב	$q$
רדיוס, התנגדות	$R$
וקטורי מיקום בדיסקה	$r_1, r_2$
משקל סגולי, התנגדות סגולית	$\rho$
שנייה	sec
משוואות המאמצים בדיסקה	$S_m$
מאמצים נורמאליים בכיוונים x ו y ו z	$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$
מאמצים ראשיים	$\sigma_1, \sigma_2$
זמן	$t$
מאמץ גזירה	$\tau_{xz}$
מאמץ גזירה מקסימאלי	$\tau_{max}$
מהירות הגל	$V$
מתח מוצא ומתח מבוא	$V_I, V_o$
Transmitted Stress Wave	TSW
Reflected Stress Wave	RSW
Transmitted Expansion Wave	TEW
Reflected Expansion Wave	REW

## 1 מבוא וסקר ספרות

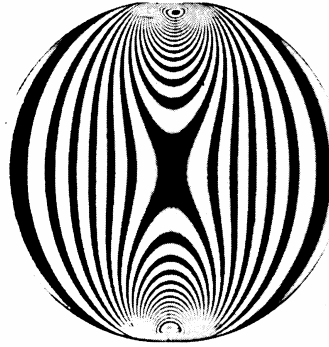
הבנה של התקדמות גלים דרך תווך גרגרי חשובה לענפי הנדסה ומחקר שונים כגון מטרולוגיה אבקות, תכנון מתמרים, גיאולוגיה וסיסמולוגיה של רעידות אדמה והתקדמות גלי הדף הנוצרים מפיצוץ. כאשר גל הלם פוגע במצע גרגרי המאמץ בתווך נוצר הן ע"י הגז העובר דרך המרווחים והן ע"י התקדמות גלי מאמץ דרך המגעיים בין הגרגרים. להבדיל מתווך רציף, גל המאמץ מועבר בין הגרגרים דרך שטח מגע קטן ולמנגנון זה השפעה רבה על התכונות הדינאמיות של התווך. מסיבה זו מחקרים שונים, בעיקר אלו המנסים לדמות בצורה נומרית את התווך הגרגרי התמקדו באפיון התיאור המתמטי ההולם ביותר של מנגנון זה.

כאמור, התקדמות גלים בתווך גרגרי הינה תופעה מורכבת המושפעת מגורמים פיסיקליים שונים כגון מידות הגרגרים, הגיאומטריה והתכונות המכאניות שלהם, אופן הסידור של המצע ותכונות גל ההלם (משך, צורה ועוצמה), לכן כדי לבדוק את ההשפעה של כל גורם יש לתאר את התווך הגרגרי בעזרת מודל פשוט יותר. מחקרים שונים דימו את התווך כאוסף של חלקיקים כדוריים, מחקרים אחרים דימו את התווך הגרגרי למערך חד מימדי או דו מימדי של חלקיקים בעזרת דיסקות גלילות, אליפטיות או אחרות. הורדת מימד אפשר שימוש במדידי מעוות (Strain Gauges) ובשיטה הפוטואלסטית לתיאור של שדה המאמצים הסטאטי והדינאמי בזמנים דיסקרטיים שונים. שילוב שיטות אלו מאפשר קבלת מידע רב על תכונות התווך: השפעת מבנה האריזה, קוטר וצורת מערך חלקיקים בהעמסה סטאטית ודינאמית, מהירות הגל וצורתו בהעמסה דינאמית חד מימדית של שרשרת ישרה של חלקיקים ולהרחיב את המחקר למערך דו מימדי. בחלק זה תובא סקירה של המחקרים השונים.

## 1.1 העמסה סטאטית

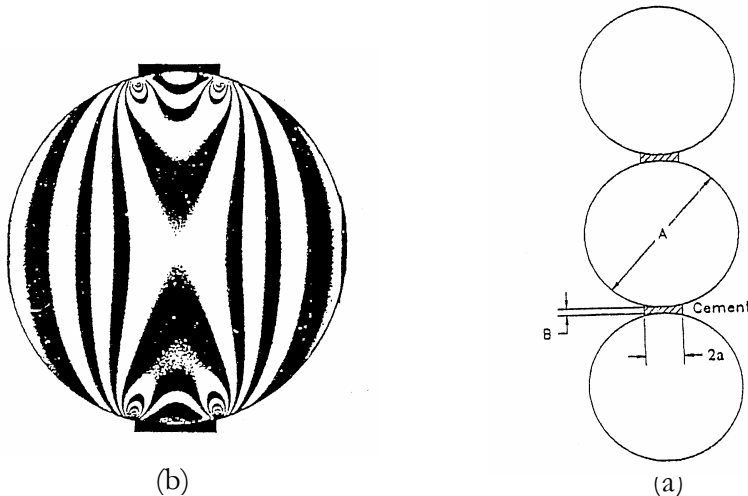
### 1.1.1 דיסקה בודדת

המקרה של דיסקה גלילית הנתונה להעמסה ע"י שני כוחות סימטריים השווים בגודלם והפוכים בכיוונם מהווה את המקרה הפשוט ביותר שבו ניתן לתאר את המאמצים בגרגר עגול בודד. בספר של Timoshenko & Goodyier (1951) מובא פיתרון אנליטי של שדה המאמצים למקרה זה אשר יפורט בהרחבה בסעיף 2.2.1.



איור 1.1 : העמסה סימטרית של דיסקה פוטואלסטית (Dally & Riley, 1978)

בעוד הפיתרון מתייחס להעמסה ע"י כוחות הפועלים על שטח קווי, הרי שבין שתי דיסקות המודבקות בניהם פועל כוח מפולג על כל השטח אותו מכסה הדבק. Sienkiewicz et al. (1996) ערכו ניסויים בדיסקות העשויות מחומר פוטואלסטי (חומר השובר את האור העובר דרכו בכיווני המאמצים הראשיים) המחוברות בעזרת שכבת דבק כמוראה באיור 1.2 על סמך פילוג הכוח שנבדק בניסויים הציעו פיתרון נומרי העורך אינטגרציה של הכוח המפולג בעזרת המשוואות המופיעות ב Timoshenko & Goodyier (1951), התאמה טובה נצפתה בין פילוג המאמצים שנמדד בניסוי לזה שהתקבל מהחישוב הנומרי.



איור 1.2 : (a) סידור של דיסקות מודבקות (b) תמונת המאמצים הפוטואלסטית

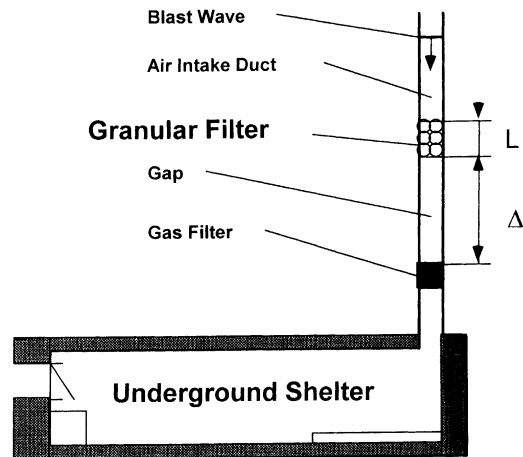
Sienkiewicz et al. (1996)

### 1.1.2 סידורים דו מימדיים

סוג אחר של מחקרים התייחס למערך דו מימדי של תווך גרגרי תוך שימת דגש על ההשפעות המבניות ופחות על הגרגר הבודד. (Travers et al. (1987, 1988) ערכו ניסויים במערך דו מימדי של דיסקות פוטואלסטיות תחת העמסה נורמאלית. הם הראו שישנו קשר אקספוננציאלי בין הדפורמציה של המערך לכוח המופעל (מיקרוסקופי), השונה בהתנהגותו מזה הקיים בין שני גרגרים עפ"י התיאוריה של Hertz (מיקרוסקופי). כמו כן נצפו מסלולים עיקריים שלאורכם המאמץ יותר גבוה משאר המערך ונבדק שדה המאמצים ביחסי גובה-רוחב שונים. השפעת צורת החלקיק נחקרה ע"י Oda et al. (1982) על מערך דו מימדי של גרגרים פוטואלסטיים אליפטיים, נמצא שלגיאוטרית החלקיק השפעה רבה על הדפורמציה. אם נבחן כיצד אופן סידור המערך משפיע על דיסקה (גרגר) בודדת, נגלה הבדל במספר נקודות המגע עם דיסקות אחרות ובזוויות המגע ביניהן. (Ammi et al. (1990) הראו שעוצמת הכוח המופעל בין שתי דיסקות תלוי בזווית בניהן ובמספר נקודות המגע עם דיסקות שכנות, תלות זאת ניתנת לכימות מתמטי בעזרת קבוע התלוי בזווית.

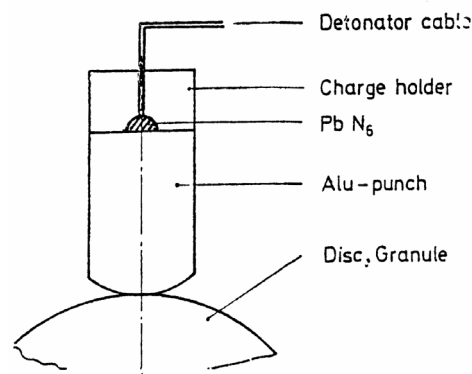
## 1.2 העמסה דינאמית

בעת פיצוץ הגל הפוגע בתווך גרגרי גורם למעבר המאמץ בשני מנגנונים: מעבר גל מאמץ דרך המבנה, כלומר דרך גרגרים הנמצאים במגע ומעבר גל ההדף דרך הגז הכלוא במרווחים שבין הגרגרים (Filtration). (Britan & Levi (2001) חקרו את הקשר בין לחץ הגז והמאמץ על הדיסקות למאמץ הלחיצה הכללי על התווך. ניתוח של שתי התופעות הנ"ל ברמה המיקרוסקופית, כלומר על גרגר בודד, מאוד מסובך וזאת בשל ההחזרות הרבות של גל ההדף ושל גל המאמץ והאינטראקציה הבין-גרגרית. לעומת זאת חקירת ההשפעה של תווך מצע גרגרי על גל הדף העובר דרכו הינה פרקטית מאוד להערכת ביצועיהם של מסננים למקלטים, האמורים לאפשר זרימת אוויר אך להחליש את גל ההדף הנוצר מהפיצוץ. (Britan et al. (2001) ערכו ניסויים בנקבת הלם שבהם בחנו את מעבר של גל ההלם דרך מצעים שונים של גרגרים כדוריים ומצאו שעוצמת גל ההלם יורדת ככל שמעלים את צפיפות המצע, כלומר הקטנת גודל החלקיקים או הגדלת גובה המצע, וככל שמעלים את החיכוך עם הקירות.



איור 1.3 : מסנן גרגרי (2001) Britan et al.

על מנת לחקור את התקדמות גל המאמץ דרך מבנה הגרגרים יש למנוע את התפשטות גל ההדף דרך הרווח שבניהם, על מנת לעשות זאת (Shukla et al. (1981-1997) תכננו תא אלומיניום מיוחד שבו הוצתה כמות קטנה של חומר נפץ. התא הושם מעל לדיסקה העליונה בסידורים דו מימדיים שונים, כך שגל המאמץ הועבר ללא התפשטות גל הדף באוויר, אורך הגל היה כ  $100 \mu\text{sec}$ .



איור 1.4 : תא נפץ (1982) Rossmannith & Shukla

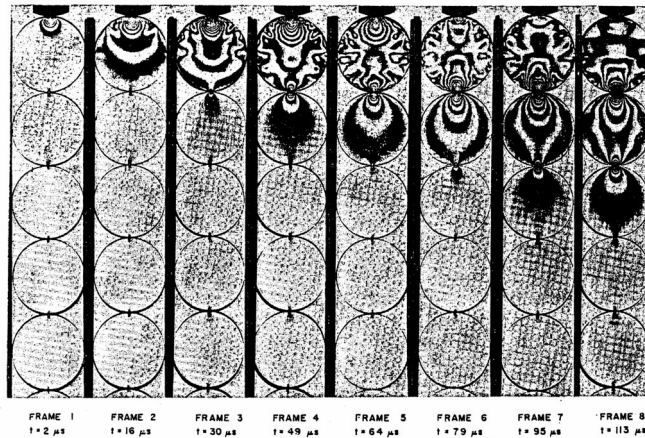


### 1.2.1 סידור חד מימדי

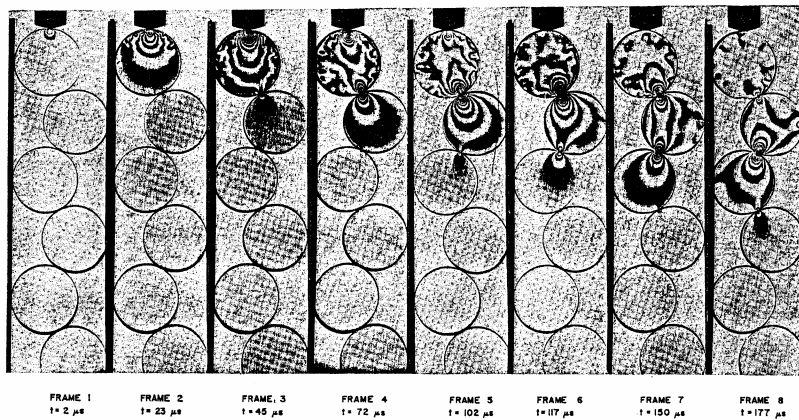
Shukla & Rossmannith (1986) חקרו את סוגי הגלים השונים שנוצרים באזור המגע לאחר פיצוץ ע"י הניסויים הבאים: האחד עם שתי דיסקות פוטואלסטיות המונחות האחת על השנייה והשני עם דיסקה פוטואלסטית המונחת על משטח פוטואלסטי. מהתמונות הפוטואלסטיות ניתן היה לראות בצורה איכותית את הגלים האורכיים, גלי הגזירה והגלים ההיקפיים הנעים לאורך שטח הפנים (גלי ריילי).

#### 1.2.1.1 השפעת הזווית על גל המאמץ

Rossmannith & Shukla (1982) היו הראשונים לשלב את השיטה הפוטואלסטית עם ניסויים בהעמסה דינאמית וצילום במצלמה מהירה. הגרורים דומו ע"י דיסקות בקוטר 50 מ"מ שיוצרו מהחומר הפוטואלסטי Homalite 100 והועמסו בעזרת תא הנפץ שתואר לעיל. משני צידי תא הניסוי הושמו לוחות קיטוב ומצלמה מהירה צילמה בכל ניסוי 20 תמונות של שדה המאמצים הפוטואלסטי בקצב של 88,000 fps. נעשו שלוש סדרות ניסויים בשרשרת ישרה של דיסקות שנבדלו זו מזו בזווית המגע בין הדיסקות:  $0^\circ$ ,  $25^\circ$ ,  $45^\circ$  וסדרת ניסויים במערך דו מימדי של דיסקות בעלות חתך לא סימטרי (איור 1.20).



איור 1.5 : העמסה דינאמית של דיסקות בזווית מגע של  $0^\circ$  (Rossmannith & Shukla (1982)



איור 1.6 : העמסה דינאמית של דיסקות בזווית מגע של  $25^\circ$  (Rossmannith & Shukla

(1982)

ערך כוח המגע הוערך ע"י השוואה לתמונת שדה המאמצים מניסוי סטאטי בכוחות שונים. מעניין לראות מאיור 1.5 ו 1.6 שתמונת המאמצים בדיסקה העליונה מעורפלת וזאת בשל החזרות רבות של גלים באזור הפיצוץ. בהמשך השרשרת, התמונה יותר מסודרת וזאת בגלל שהגל האורכי דומיננטי יותר. ניתן להעריך את אורך הגל האורכי ומהירותו עפ"י זיהוי הזמן בו מתחיל מאמץ בנקודת מגע מסוימת והזמן בו המאמץ נעלם מנקודה זו, נמצא שפרק זמן זה פרופורציונאלי לזמן שגל המאמץ עובר שלוש דיסקות. בסידור מזוגג ניתן להעריך את אורך גל הגזירה עפ"י משך הזמן שקיים מאמץ בנקודת המגע שבין הדיסקה לדופן תא הניסוי, נמצא שמהירות גל הגזירה היא כ 60% ממהירות הגל האורכי. עפ"י ערכי המהירות האורכית הנתונים בטבלה 1.1 ניתן לראות ש:

1. מהירות גל המאמץ בתוך הגרגרי נמוכה בצורה משמעותית מהמהירות בחומר רציף (2133 m/sec).
2. בכל הסידורים המהירות ירדה עם התקדמות הגל בשל איבודי אנרגיה.
3. המהירות יורדת עם הגדלת הזווית וזאת בגלל כמות גדולה יותר של נקודות מגע ליחידת אורך המורידות את האנרגיה של הגל.

$c_1$ [m/sec]			
Depth [mm]	$\alpha = 0^\circ$	$\alpha = 25^\circ$	$\alpha = 45^\circ$
100	1140	700	650
200	760	540	240

טבלה 1.1 המהירות האורכית (מטר/שנייה) של גל המאמצים בשרשרת ישרה Rossmanith & Shukla (1982)

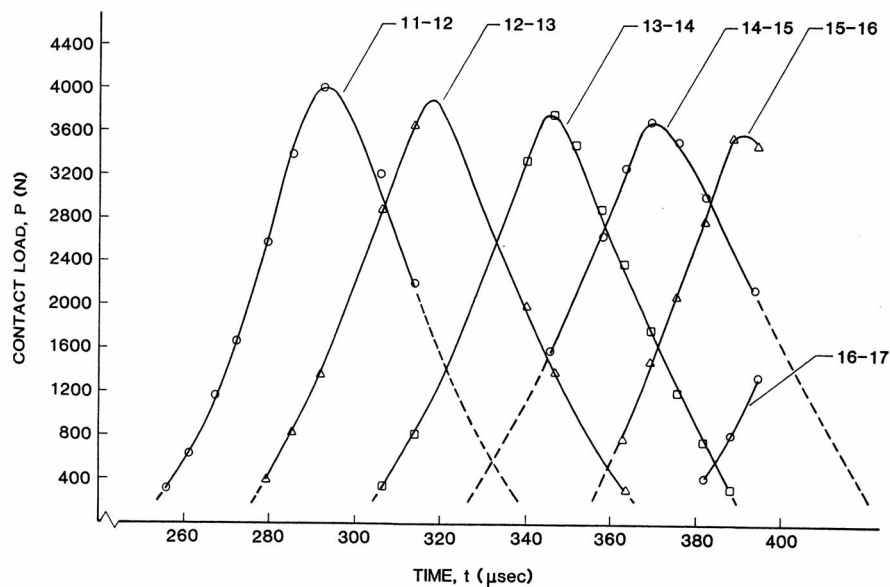
יתרונם של הניסויים הפוטואלסטיים הוא בכך שניתן לצפות בשדה המאמצים המלא בתוך, אך היה צורך לבצע ניסויי כיוול סטאטיים על מנת להעריך בצורה כללית את הכוח על התוך, ובאופן פחות מדויק את הכוח בנקודות המגע בין הדיסקות. Shukla & Nigham (1985) הציעו סכימה איטרטיבית המבוססת על משוואות מאמצי המגע של Hertz אשר הורחבו ע"י Smith & Chang (1953) לכוח משיקי בשילוב כוח נורמאלי. הסכימה מחשבת את כוח המגע ומקדם החיכוך בין שתי דיסקות עפ"י הנתונים המוצאים מקווי האיזוכרומטה באזור המגע בניסויים פוטואלסטיים. הסבר על השיטה מובא בפרק 2.2.3.

### 1.2.1.2 השפעת קוטר הדיסקה על גל המאמץ

Shukla & Damania (1987) הרחיבו את הניסויים בשרשרת ישרה של דיסקות ( $\alpha = 0^\circ$ ) לקטרים של 25.4, 31.8, 38.1 ו 50.8 מ"מ ושילבו ניסויים בעזרת מדידי מעוות שהודבקו על הדיסקות במרחק 6 מ"מ מנקודת המגע עם ניסויים בדיסקות פוטואלסטיות. כוחות המגע בין הדיסקות הפוטואלסטיות חושבו בעזרת השיטה האיטרטיבית של Shukla & Nigham (1985) (החיכוך שווה לאפס בשרשרת ישרה) וערך המעוות חושב עפ"י משוואות מאמצי המגע של Hertz והשווה לזה שהתקבל מניסויים עם מדידי מעוות. חלק מהתוצאות מובא בטבלה 1.2.

Disk diameter, D [mm]	25.4	31.8	38.1	50.8
Wave Velocity, V [m/sec]	995	1150	1240	1350
Wave length, $\lambda$ [mm]	90.5	95.25	101.6	114.3
$\lambda/D$	3.56	3	2.67	2.25

טבלה 1.2 תוצאות ניסויים פוטואלסטיים לקטרים שונים (Shukla & Damania (1987)



איור 1.7 : גל המאמצים בנקודות מגע שונות בשרשרת ישרה (Shukla & Damania (1987)

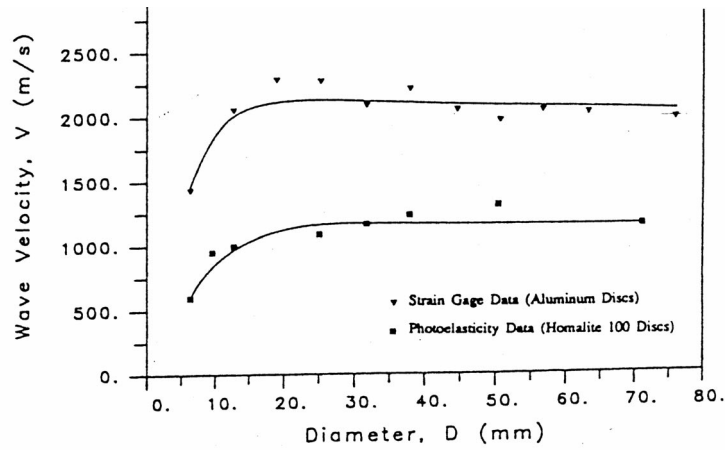
מניתוח גל המאמץ עולה כי :

1. מהירות הגל דועכת בצורה חדה בארבע הדיסקות הראשונות ואח"כ בצורה מתונה יותר.
2. אורך גל המאמצים בדיסקה,  $\lambda$ , עולה ככל שמעלים את הקוטר,  $D$ , אך היחס  $\lambda/D$  קטן.
3. ככל ש  $\lambda/D$  קטן מהירות הגל עולה.
4. אורך הגל הוא כ  $200 \mu\text{sec}$ .
5. ישנה דעיכה של כ 20% באמפליטודה המקסימאלית במרחק 5 דיסקות מנקודת המגע הראשונה, לעומת דעיכה של כ 2% במרחק זהה בחומר רציף.

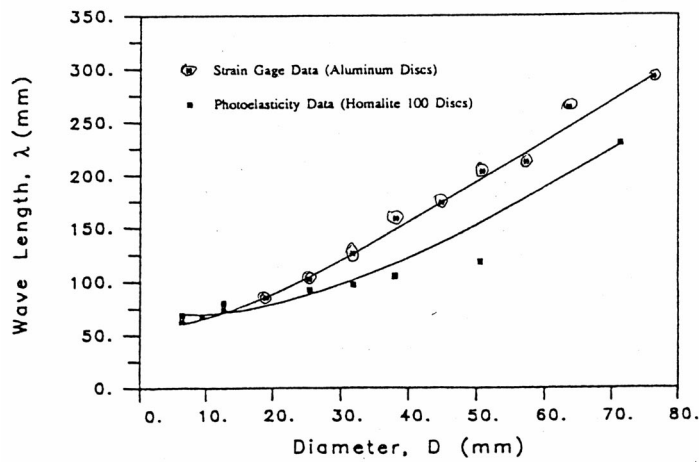
ניסויים נוספים נערכו ע"י Xu & Sukla (1990) על מנת לבדוק את מאפייני מהירות גל המאמצים בשרשרת ישרה של דיסקות. נערכו שתי סדרות ניסויים, האחת בעזרת מדידי מעוות שהודבקו במרכזן של דיסקות אלומיניום בקטרים שבין 6.4 מ"מ ל 76.2 מ"מ ובעובי 6.4 מ"מ, כאשר מרחק של שלושה קטרים נשמר בין מדי המעוות. סדרה אחרת נערכה בעזרת שרשרת דיסקות פוטואלסטיות בקטרים שבין 6.4 מ"מ ל 71.1 מ"מ ובעובי 6.4 מ"מ.

התוצאות העיקריות של הניסויים הן :

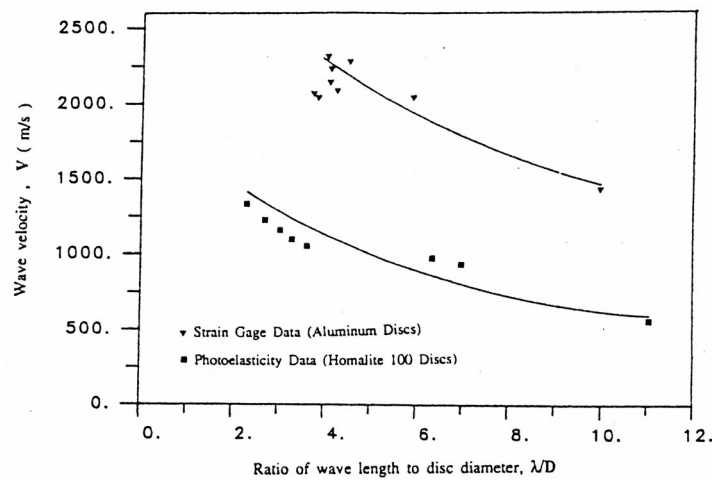
- מהירות גל המאמצים עלתה עם הגדלת הקוטר מ 6.4 מ"מ ל 12.7 מ"מ בכ 46% אך כמעט ולא השתנתה עם המשך הגדלת הקוטר (איור 1.8).
- אורך הגל עולה בצורה הדרגתית עם העלאת הקוטר וזאת בגלל שהוא עובר דרך מרחקים ארוכים יותר של חומר רציף (איור 1.9).
- אם נבחן את היחס בין אורך הגל לקוטר  $\lambda/D$  נראה שהוא יורד מ 10 ל 6 עם הגדלת הקוטר מ 6.4 מ"מ ל 12.7 מ"מ ונע סביב 3.5 עבור דיסקות בקטרים הגדולים מ 25 מ"מ. לכן המסקנה המתבקשת היא שהיחס  $\lambda/D$  הוא הפרמטר המשפיע על מהירות הגל ולא הקוטר (איור 1.10).



איור 1.8 : מהירות גל המאמצים כתלות בקוטר הדיסקה (Xu & Sukla (1990))



איור 1.9 : אורך הגל כתלות בקוטר הדיסקה (Xu & Sukla (1990))

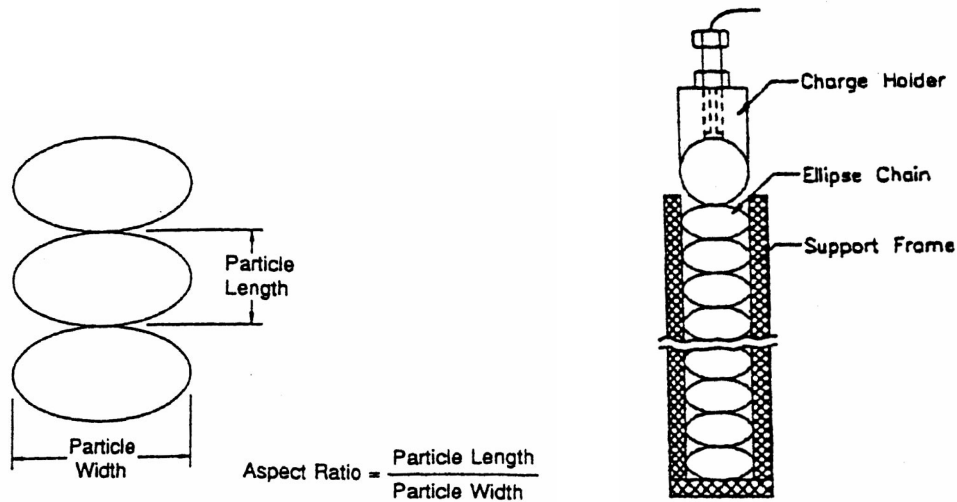


איור 1.10 : מהירות גל המאמצים כתלות ביחס בין אורך הגל לקוטר הדיסקה

Xu & Sukla (1990)

### 1.2.1.3 השפעת גיאומטריית הדיסקה וחספוס אזור המגע על גל המאמץ

השפעת גיאומטריית הדיסקה על התקדמות גל המאמצים נחקרה ע"י Shukla et al. (1993a) בעזרת ניסויים בדיסקות פוטואלסטיות אליפטיות ביחסי אורך/רוחב שונים (איור 1.11).

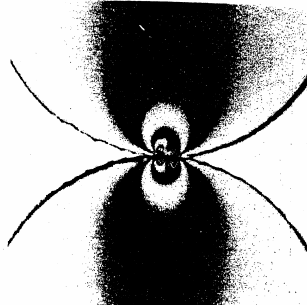


איור 1.11 : ניסוי בדיסקות אליפטיות (Shukla et al. (1993a)

כדי לבדוד את השפעת גודל החלקיק מהשפעת צורת החתך שלו הניסויים תוכננו כך שמספר המגעים ליחידת אורך יישאר קבוע. לצורך זאת בוצעו ניסויים עם דיסקות אליפטיות עם ארבעה יחסי אורך/רוחב: האורך נשאר קבוע ושווה ל 25.4 מ"מ והרוחב השתנה: 12.7 מ"מ, 19.1 מ"מ, 25.4 מ"מ, 38.1 מ"מ. תוצאות הניסויים הושושו עם חישובים נומריים המבוססים על שיטת Distinct Element Method ועלה כי:

- מהירות התקדמות גל המאמצים תלויה בצורה ברורה בגיאומטריית החלקיק: המהירות עלתה מ 950 מ/ש ל 1250 מ/ש עם הורדת רוחב הדיסקה מ 38.1 מ"מ ל 12.7 מ"מ. המחברים ייחסו זאת לשינוי במסה ליחידת אורך של הדיסקה ולהחזרות בתוך הדיסקה.
- אורך גל המאמץ כמעט ולא השתנה עם השינוי בגיאומטריה (כל עוד אורך הדיסקה נשאר קבוע).
- קצב הדעיכה של המאמץ המקסימאלי בנקודת המגע עלה עם הגדלת רוחב הדיסקה, וזאת בשל הארכת המסלולים שהיה על הגל להתקדם, דבר המוריד את עוצמתו.

על מנת לבדוק את השפעת החספוס של שטח המגע בין הדיסקות נערכו ע"י Shukla et al. (1993a) שני ניסויים פוטואלסטיים נוספים עם דיסקות עגולות בקוטר 25.4 מ"מ וחספוס של 0.01 מ"מ ו 0.022 מ"מ. בדיקה תחת עומס סטאטי העלתה שמשוואות מאמצי המגע של Hertz תקפות באזור הנמצא במרחק שבין  $2b$  ל  $8b$  מנקודת המגע  $b$  הוא חצי רוחב אזור המגע). תמונת המאמצים הפוטואלסטית מראה מגע רב נקודתי בין הדיסקות המחוספסות (איור 1.12).



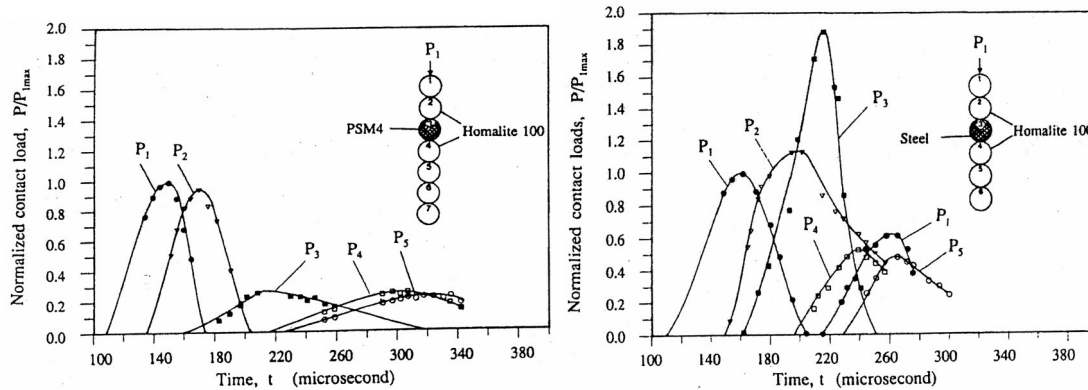
איור 1.12 : אזור המגע בין דיסקות מחוספסות (Shukla et al. (1993a)

הניסויים הראו ש :

- מהירות הגל יורדת ככל שהחספוס עולה וזאת בגלל שהחספוס מוסיף נקודות מגע וגורם להחזרות רבות יותר.
- בדיסקות מחוספסות האמפליטודה המקסימאלית לא דעכה כמו בדיסקות חלקות, וצורת הגל לא הייתה חלקה. ניתן לייחס זאת לדחיסה של השפה המחוספסת בזמן מעבר גל המאמץ.

### 1.2.1.4 דיסקות עם מודול יאנג שונה

על מנת לחקור את השפעת המבנה הפנימי של התווך הגרגרי על גל המאמצים Shukla et al. (1992) ערכו ניסויים בשרשרת ישרה של דיסקות בקוטר 25.4 מ"מ ועובי של 6.4 מ"מ מהחומר הפוטואלסטי Homalite 100, שבה החליפו את אחת הדיסקות לפלדה או ל PSM 4 שהוא חומר פלסטי רך יחסית.



איור 1.13 : (a) שרשרת עם דיסקת פלדה (b) שרשרת עם דיסקת PSM4

Shukla et al. (1992)

מאחר והאימפדנס האקוסטי של פלדה גבוה פי 16 מזה של Homalite 100 הוא גורם להחזרה של חלק מהגל, דבר הגורם לכך שהכוח המקסימאלי בנקודת המגע 3 (איור 1.13 a) גדול פי 1.8 מזה שנמדד בנקודה 1. מאחר וחלק מהאנרגיה מוחזר כוח המגע בנקודה 4 יורד לחצי. ניתן לראות שאורך הגל המוחזר והמועבר דרך דיסקת הפלדה כמעט ולא השתנה.

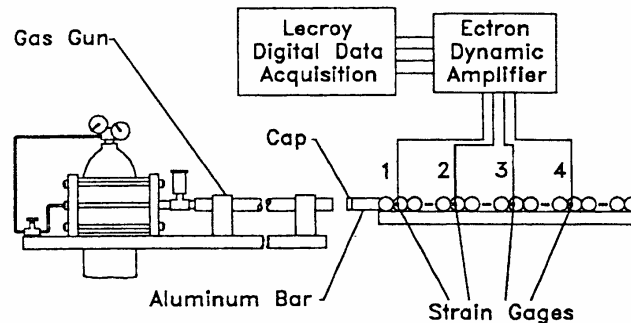
האימפדנס האקוסטי של PSM 4 קטן פי 9 מזה של Homalite 100 ולכן הכוח בנקודת המגע 3 באיור 1.13 b נמוך מאוד. אורך הגל המועבר להמשך השרשרת גדול פי ארבע מאורך גל הכניסה ללא עדות להחזרות לכיוון נקודה 2.

בשני המקרים הכוח המקסימאלי בנקודת המגע 4 היה נמוך יחסית לכוח המקסימאלי בנקודה 1. במקרה של PSM 4 כוח זה היה נמוך פי שניים מהפלדה.



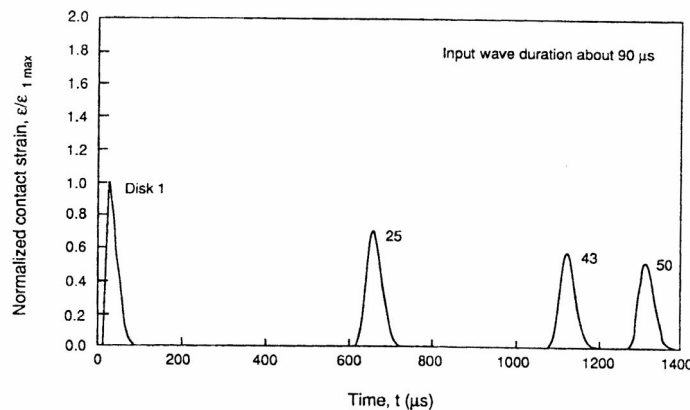
### 1.2.1.5 השפעת אורך גל ההעמסה על גל המאמץ

הניסויים עם דיסקות שפורטו עד כה, נערכו בעזרת תא עם חומר נפץ המספק גל העמסה באורך של כ  $100 \mu\text{sec}$ , כמו כן מספר התמונות שניתן לצלם בעזרת המצלמה המהירה שבה השתמשו היה מוגבל ל 20, לכן כדי לבדוק את ההשפעה של משך גל ההעמסה על התקדמות המאמצים בדיסקות היה צורך לשנות את אופן עריכת הניסויים. Shukla et al. (1993b) ערכו ניסויים על שרשרת ישרה של 100 דיסקות בקוטר 25.4 מ"מ ועובי 6.35 מ"מ העשויות מהחומר הפוטואלסטי Homalite 100. אל מספר דיסקות הוצמדו מדידי מעוות במרחק 5 מ"מ מנקודת המגע שמדדו את היסטורית המעוותים בנקודה. השרשרת הועמסה ע"י אקדח גז שדחף מוט אלומיניום אל הדיסקה הראשונה (איור 1.14). בעזרת הוספה של דיסקה מחומר גמיש יותר בין האלומיניום לשרשרת ניתן היה להגדיל את אורך הגל.



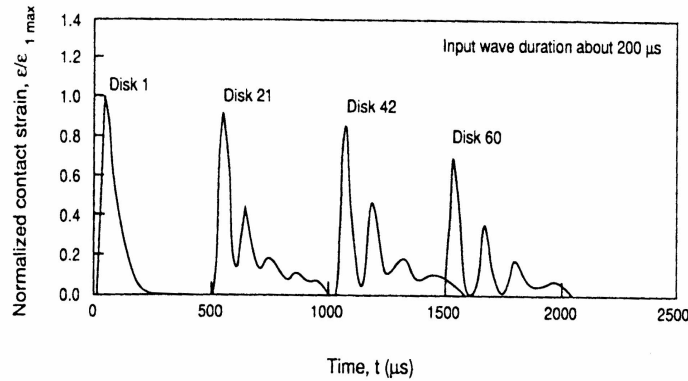
איור 1.14 : אקדח גז (Shukla et al. (1993b)

בניסויים נבדקו גלים שמשכם  $90 \mu\text{sec}$ ,  $200 \mu\text{sec}$ ,  $650 \mu\text{sec}$  ו  $900 \mu\text{sec}$ , התוצאות הושו למודל נומרי. מגרף המעוות המנורמל כתלות בזמן עבור גל העמסה שמשכו  $90 \mu\text{sec}$  (איור 1.15) ניתן לראות שצורת גל המאמצים דומה לצורת גל ההעמסה וישנה דעיכה של האמפליטודה המקסימאלית ככל שמתרחקים מהדיסקה הראשונה, מהירות הגל 987 מ/ש.



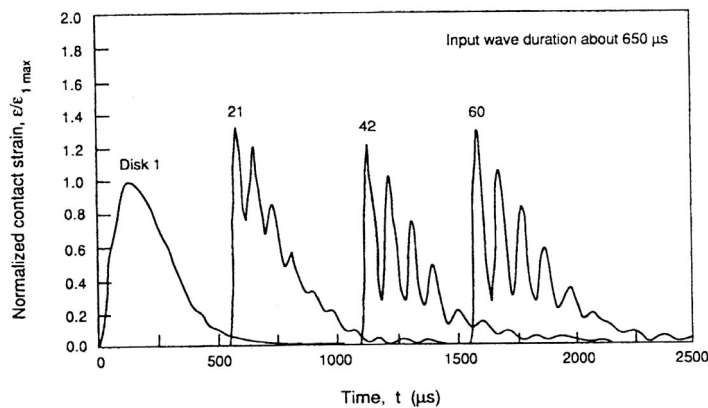
איור 1.15 : גל העמסה שמשכו  $90 \mu\text{sec}$  (Shukla et al. (1993b)

כאשר מגדילים את משך גל ההעמסה ל  $200 \mu\text{sec}$  גל המאמצים מתחיל להתפזר למספר גלים קטנים יותר (אוסצילציות) ככל שמתרחקים מהדיסקה הראשונה, הדעיכה בערך האמפליטודה המקסימאלית מתונה יותר.

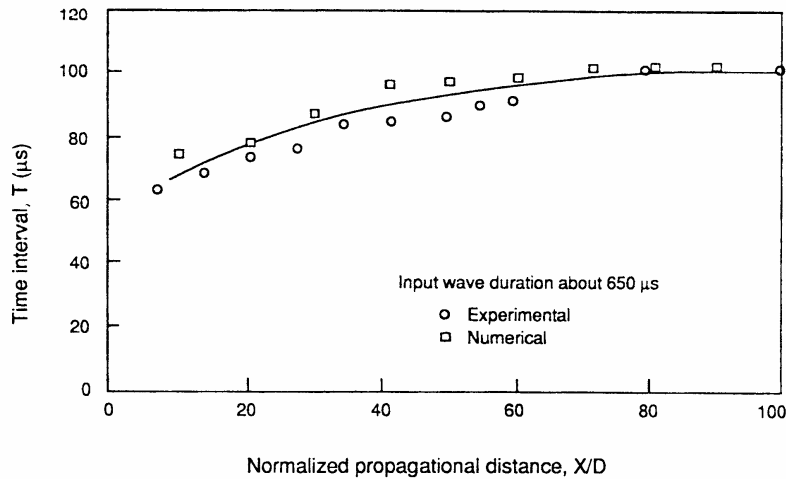


איור 1.16 : גל העמסה שמשכו  $200 \mu\text{sec}$  Shukla et al. (1993b)

הגדלה נוספת של משך גל ההעמסה ל  $650 \mu\text{sec}$  מראה שגל המאמצים מתפזר לגלים קטנים יותר. האמפליטודה המקסימאלית בדיסקות המרוחקות מהדיסקה הראשונה גבוהה יותר ודועכת תוך יצירת אוסצילציות שמשכן כ  $100 \mu\text{sec}$  בתוך הגל העיקרי, פרק זמן המתאים לאורך גל של כ 4 דיסקות כפי שנצפה ע"י Xu & Shukla (1990). משך הזמן של הגל עולה בצורה הדרגתית עם ההתקדמות (איור 1.17). מהירות הגל  $950 \text{ מ/ש}$ .

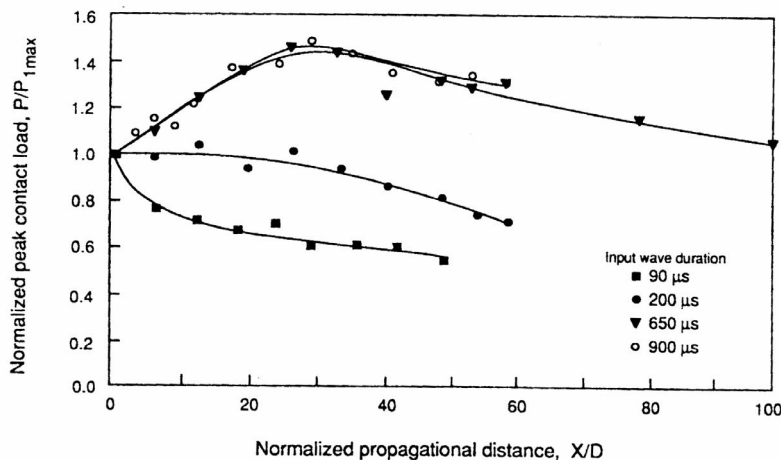


איור 1.17 : גל העמסה שמשכו  $650 \mu\text{sec}$  Shukla et al. (1993b)



איור 1.18 : משך הגל כתלות במרחק (Shukla et al. (1993b

גלים הנמשכים זמן רב יותר נושאים יותר אנרגיה מגלים קצרים יותר ולכן כשהם מתפרקים לגלים קצרים יותר, הגל המוביל מקבל יותר אנרגיה והאמפליטודה המקסימאלית שלו גבוהה יותר. במרחק רב מההתחלה איבודי האנרגיה דרך המגעים גורמים בסופו של דבר להורדת האמפליטודה המקסימאלית (איור 1.19).



איור 1.19 : האמפליטודה המקסימאלית כתלות במרחק (Shukla et al. (1993b

תוצאות הניסוי תואמות את הניתוח האנליטי של Nesterenko (2001) שהראה שהתווך הגרגרי משמש כמסלול לא ליניארי לגל המאמצים.

Zhu et al. (1997) ערכו ניסויים בעזרת תא נפץ על שרשרת ישרה של דיסקות או כדורים בקוטר 25.4 מ"מ כאשר בין השרשרת לתא הכניסו חומר רך כדי להאריך את הגל. נבדקו גלים באורך  $120\mu\text{sec}$ ,  $490\mu\text{sec}$  ו  $1330\mu\text{sec}$  לדיסקות וגלים באורך  $150\mu\text{sec}$ ,  $480\mu\text{sec}$  ו  $1190\mu\text{sec}$  לכדורים.

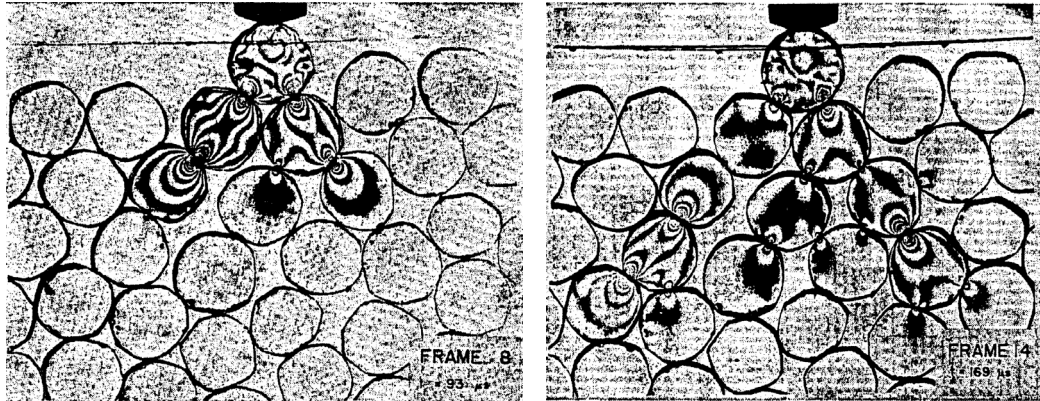
ממדידת המעוותים עלה כי :

- מהירות גל המאמצים יורדת עם הגדלת אורך הגל.
- מהירות הגל העובר דרך שרשרת של כדורים נמוכה בכ 35% מזו הנמדדת בשרשרת של דיסקות בעלות אותו קוטר, ההבדל יוחס ע"י המחברים להבדל בקשיחות ובמסה.
- באורך גל קצר הגל בשרשרת של דיסקות מתארך בכ 8% לאורך 80 דיסקות לעומת התארכות של כ 30% לאורך 60 כדורים.
- באורך גל קצר ישנה דעיכה של כ 60% באמפליטודת הכדור החמישי לעומת הכדור הראשון לעומת דעיכה של כ 20% בדיסקות וזאת בגלל החזרות רבות יותר בכדורים.
- גלים ארוכים מתפרקים לשרשרת גלים קצרים יותר.
- בדיסקות, האמפליטודה של הגל הראשון לאחר ההתפרקות גבוהה יותר עבור גלים באורך של  $490\mu\text{sec}$  ו  $1330\mu\text{sec}$ . בכדורים התופעה נצפתה רק עבור אורך גל של  $1190\mu\text{sec}$ . בתחילה, האמפליטודה של הגל השלישי הייתה גבוהה יותר אך עם ההתקדמות, האמפליטודה של הגל המוביל הפכה לגבוהה יותר, כלומר יש סידור מחדש של האנרגיה. עפ"י (Nesterenko (2001 לגל בעל המהירות הגבוהה יותר אמפליטודה גבוהה יותר, זו כנראה הסיבה שלגל הראשון יש את האמפליטודה הגבוהה יותר.
- מניתוח התדירויות שלהן מתפרק הגל ע"י התמרת פורייה עולה כי לפני ההתפרקות רוב האנרגיה מרוכזת בתדירויות נמוכות ולאחר ההתפרקות בתדירויות גבוהות יותר.

## 1.2.2 סידורים דו מימדיים

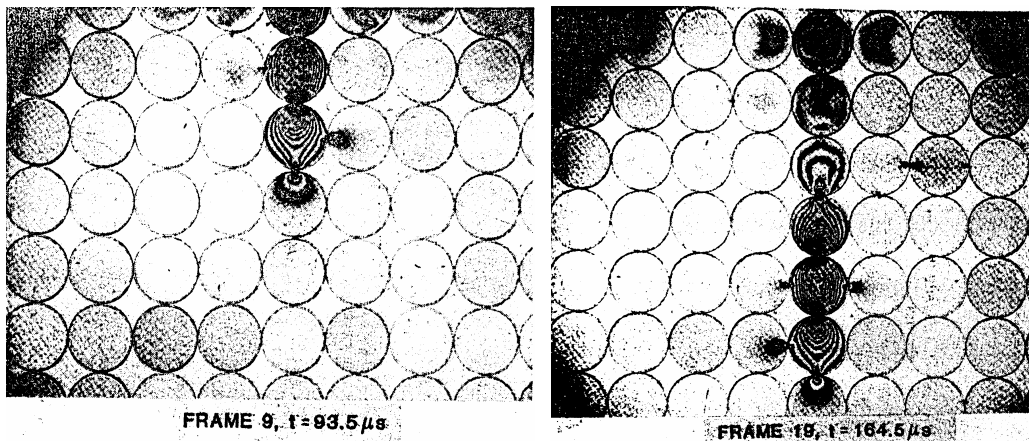
### 1.2.2.1 מבנה אקראי, BCC, HCP.

הניסויים של Rossmannith & Shukla (1982) במערך דו מימדי אקראי של דיסקות הראו שגל המאמץ מתקדם בכיוונים התלויים בזווית בין הדיסקות עפ"י קורלציה הדומה לזו שהתקבלה מהניסויים הסטטיים.



איור 1.20 : התקדמות גל המאמץ בסידור דו מימדי אקראי (Rossmannith & Shukla (1982)

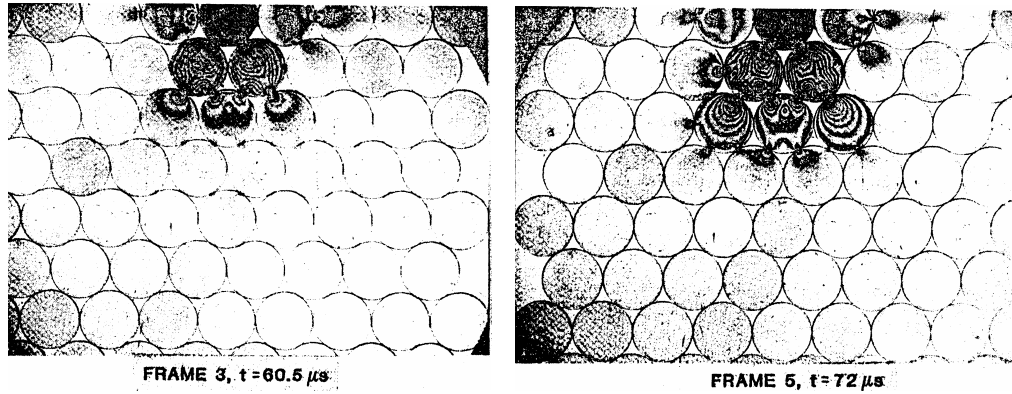
Shukla & Damania (1987) ערכו ניסויים נוספים בעזרת אותה מערכת ניסוי על מערכים מסוג BCC (Body Centered Cubic) ו HCP (Hexagonal Closed Packing) כמוראה באיורים 1.21 ו 1.22.



איור 1.21 : סידור BCC (Shukla & Damania (1987)

מעניין לראות שגל המאמצים מתקדם בסידור BCC בצורה דומה לזו שבשרשרת נורמאלית של דיסקות, כמעט ללא השפעה על הדיסקות שבצדדים, כלומר המאמץ לא עובר כאשר הזווית בין

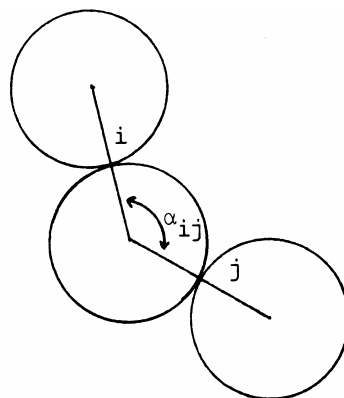
הקטרים המחברים את מרכזי הדיסקות היא  $90^\circ$ . מהירות הגל בניסוי היא 1055 מ/ש והדעיכה באמפליטודה המקסימאלית של העומס בחמשת הדיסקות שלאחר נקודת המגע הראשונה היא כ-20%, כמו בשרשרת נורמאלית.



איור 1.22 : סידור HCP (Shukla & Damania (1987))

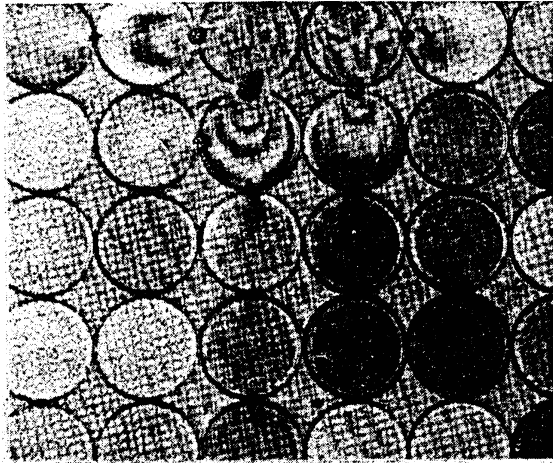
בסידור HCP גל המאמץ מתקדם דרך שני מסלולים עיקריים שבהם הכוח המשיקי שואף לאפס ודומים לשרשרת נורמאלית הנוטה בזווית. מסלולים אלו יוצרים צורת משולש כאשר מסלול משני מעביר את המאמץ דרך הדיסקות הנמצאות בין המסלולים העיקריים. הדעיכה באמפליטודה המקסימאלית של העומס בחמשת הדיסקות שלאחר נקודת המגע הראשונה היא כ-70%, הרבה יותר משרשרת נורמאלית וזאת בשל איבוד אנרגיה בנקודות מגע רבות יותר.

(Shukla & Damania (1987)) הסיקו שהמאמץ בשרשרת של שלוש דיסקות לא עובר מהדיסקה הראשונה לשלישית אם זווית המגע  $\alpha_{ij}$  כמוגדר באיור 1.23 חדה. המעבר אפשרי רק עבור זווית קהה.

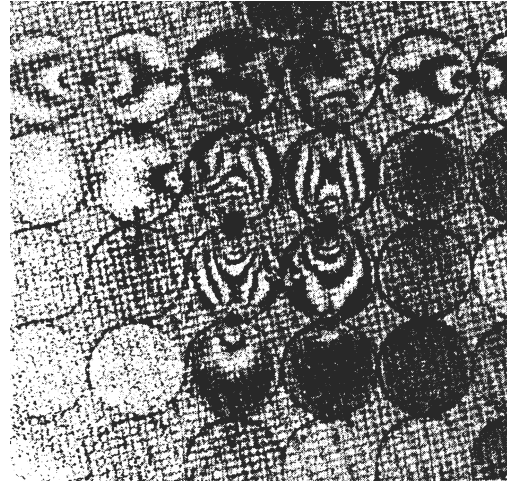


איור 1.23 : זווית המגע בין דיסקות (Shukla & Damania (1987))

על מנת לאשש טענה זו הם ערכו ניסוי נוסף בסידור BCC, הפעם הדיסקה העליונה הייתה בין שני טורים כמוראה באיור 1.24. גל המאמץ עבר דרך שני מסלולים אנכיים ומסלול אופקי, המעבר אכן התקדם רק בזוויות קהות.



FRAME 11,  $t = 62 \mu s$



FRAME 20,  $t = 103 \mu s$

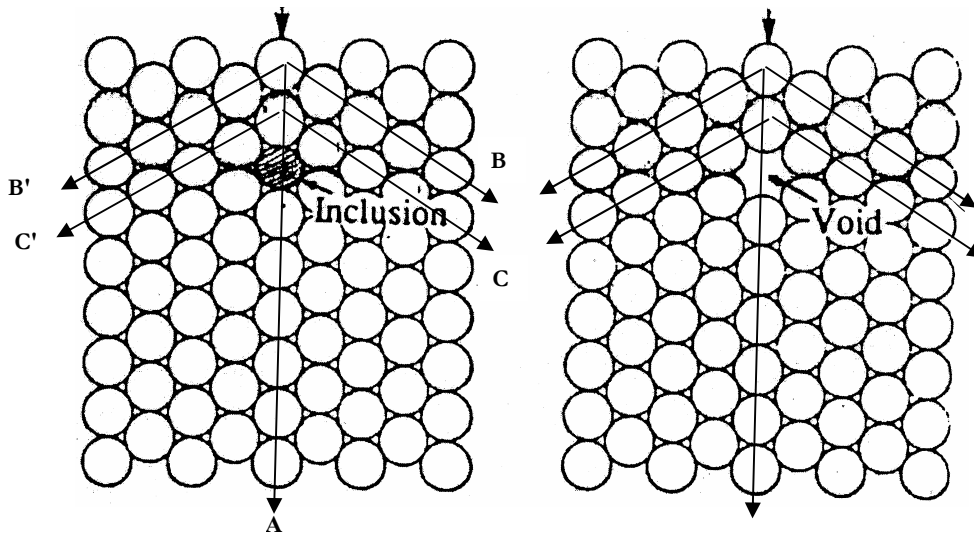
איור 1.24 : פיצוץ בין שני טורים בסידור BCC (Shukla & Damania (1987)

לאור התלות בין כוח המגע לזווית בין הדיסקות (Zhu et al. (1991 הציעו דרך לחיזוי כוח המגע המקסימאלי בין דיסקות. החישוב התבסס על ערכים ניסויים של מקדמים מתמטיים המבטאים את היחס בין כוח המגע המקסימאלי בדיסקה המעבירה את הכוח לכוח המגע המינימאלי בדיסקה המקבלת, בתלות בזווית המגע. מניסויים התברר שעבור סידורים מסוג BCC, HCP הכוח המשיקי בנקודות המגע הוא לכל היותר כ 15% מהכוח הנורמאלי, לכן הוחלט להזניחו בחישוב, דבר זה לא נכון עבור סידור אקראי. חיסרון נוסף של השיטה הוא אי התחשבות בצורה ובאורך גל הפיצוץ, כלומר השיטה מעריכה את כוח המגע המקסימאלי ללא תלות בזמן, למרות זאת היתה התאמה טובה מאוד לניסוי בשרשרת ישרה של דיסקות והתאמה טובה לניסויים במערכי HCP.

המאמר של Shukla (1991) מרכז את המחקרים על השפעת זווית המגע על כוח המגע כפי שנסקר עד כה.

### 1.2.2.2 השפעת חלל או הקשחה על גל המאמצים במבנה HCP

על מנת לחקור את השפעת המבנה הפנימי של התווך הגרגרי על גל המאמצים (Sadd et al. (1989) ערכו ניסויים במבנה HCP של דיסקות בקוטר 25.4 מ"מ ועובי של 6.4 מ"מ מהחומר הפוטואלסטי Homalite 100. בניסויים הסירו חלק מהדיסקות כדי ליצור חלל (Void) או שהחליפו את חלקם בדיסקות מברזל. תוצאות הניסוי הושו עם חישוב נומרי עפ"י שיטת Distinct Element Method.



(b) הקשחה (Sadd et al. (1989)

איור 1.25 : (a) חלל

מהניסויים עלה כי :

- מרבית האנרגיה עברה במסלולים A, B, B' שהיו במגע עם הדיסקה שמתחת לתא הנפץ, ובמסלולים C, C' בשורה מתחת כמוראה באיור 1.25.
- מהירות הגל בכיוון האנכי A היא 1070 מ/ש.
- כאשר הוכנסה דיסקה מפלדה במקום המוראה באיור b 1.25 חזית ומהירות הגל בכיוון האנכי A כמעט ולא הושפעו, לעומת זאת האמפליטודה המקסימאלית של הגל במרחק שתי דיסקות דעכה בכ 69% לעומת דעיכה של כ 30% במבנה רגיל. במסלולים B ו C לא נמדד כמעט כל שינוי.
- כאשר הוצא דיסק ונוצר חלל, גל המאמצים לא התקדם בכיוון האנכי A ולכן האנרגיה הועברה למסלולים C, C' וגרמה להעלאת האמפליטודה במסלולים אלו.

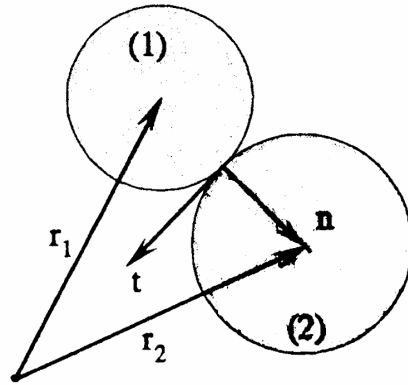


### 1.3 מודלים פיסיקליים לתיאור גל מאמץ בתווך גרגרי

#### Distinct Element Method 1.3.1

שיטה זו היא סכימה נומרית המשתמשת בדינאמיקה של גוף קשיח ניוטוני עבור כל גרגר בתווך הגרגרי. מנגנון המגע בתוך הגרגר מיוצג תוך הנחה שלגרגרים יש קשיחות ודעיכה, בדרך זו ניתן לבצע סימולציה על סידורים שונים של גרגרים. שיטה זו הותאמה לבעיות התקדמות גלים ע"י Shukla et al. (1989) ושולבה עם ניסויים שונים לבדיקת מהירות הגל וניסויים שנערכו ע"י Shukla et al. (1993a,b) לבדיקת גודל וגיאומטריית הגרגר ומשך גל ההעמסה. השיטה מחשבת את התזוזה היחסית בין הגרגרים  $\Delta\delta$  בכיוון הנורמאלי  $n$  ובכיוון המשיקי  $t$  עבור צעד זמן  $\Delta t$  לפי :

$$\begin{aligned}\Delta\delta_n &= v_n \Delta t = [(\bar{v}_1 - \bar{v}_2) \cdot \hat{n}] \Delta t \\ \Delta\delta_t &= v_t \Delta t = [(\bar{v}_1 - \bar{v}_2) \cdot \hat{t} - (w_1 r_1 + w_2 r_2)] \Delta t\end{aligned}\quad (1.1)$$



איור 1.26 : סימון מערכת הצירים בסכימה Shukla et al. (1993b)

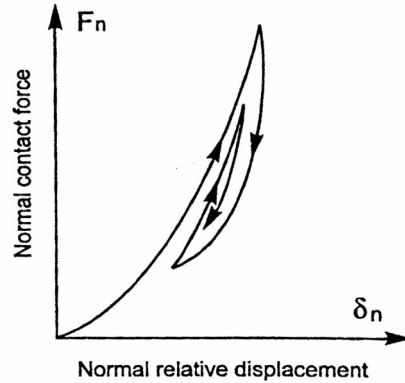
את כוח המגע ניתן לחשב ע"י מודל מתמטי שנמצא מתאים לניסוייהם של Shukla et al. (1993b) כשבאופן כללי  $F_n = F_n(\delta_n, v_n)$ ,  $F_t = F_t(\delta_t, v_t, \delta_n, v_n)$ . את כוח המגע מחשבים בעזרת שני קבועי קשיחות ושני קבועי ריסון שאת ערכיהם יש לקבל מניסויים. מכאן ניתן לחשב את תאוצת הגרגר מהקשר :

$$a = \frac{\sum F}{m}\quad (1.2)$$

לאחר חישוב התאוצה ניתן לדעת מהי המהירות לצעד הזמן הבא עפ"י:

$$v = a\Delta t \quad (1.3)$$

ולחשב את התזוזות עבור צעד הזמן הבא עפ"י משוואה 1.1.



איור 1.27 : הרכיב הניצב של כוח המגע (Shukla et al. (1993b)

ניתן להשתמש בשיטת Distinct Element Method בעזרת סכימה נומרית מסוג Explicit על מנת לחקור תצורות שונות של תווך גרגרי.

### 1.3.2 Soliton Dynamics

Nesterenko (2001) הראה שמשוואת הגלים הכללית (1.4) לא מתאימה לתיאור התקדמות גלים בתווך גרגרי מפני שמהירות הגל  $C_0$  לא קבועה כמו בחומר רציף.

$$c_0^2 u_{xx} = u_{tt} \quad (1.4)$$

לכן לצורך תיאור הגלים בתווך גרגרי הוא פיתח מודל אנליטי המתבסס על קירוב התווך לחומר רציף ופיתוח ביטוי למהירות הגל בעזרת טורי טיילור. המודל, שאומת ע"י ניסויים חוזה את התפרקות הגל לגלים קטנים יותר, הנקראים Solitary Waves. נמצא שלמעוות ההתחלתי (הנובע מעוצמת ההעמסה הסטאטית של הגרגרים לפני העומס הדינאמי) יש השפעה על מהירות הגל בתווך, והמקרה שבו ההעמסה הסטאטית ההתחלתית זניחה נקרא Sonic Vacuum. המודל מאפשר לחשב את מהירות הסוליטונים (Solitary Waves) וחוזה אנליטית את התוצאות הניסוייות שקיבלו (1997), Zhu et al. (1993b), Shukla et al. לפיהם אמפליטודת הסוליטון הראשון גבוהה יותר.

## 1.4 סיכום

בפרק זה הובאה סקירה של עבודות שונות שנעשו בשני העשורים האחרונים לחקירת תווך גרגרי. התווך הגרגרי דומה בעזרת דיסקות פוטואלסטיות שאפשרו לראות את שדה המאמצים בהן ושימוש בצילום מהיר הפך את השיטה ליעילה גם למחקר של העמסה דינאמית, דבר שנתן דחיפה לפיתוח כלים לניתוח כוח המגע והמאמצים בדיסקה בעזרת הניסויים הפוטואלסטיים ומשוואות מאמצי המגע של Hertz. שילוב השיטה הפוטואלסטית עם מדידי מעוותים לחקירת גל המאמצים הוביל להבנה טובה יותר של השפעת גודל החלקיק וצורתו, מבנה הסידור של התווך הגרגרי ושל משך זמן של גל ההעמסה.

בחינה של העבודות שנעשו בתחום הראתה שבכל העבודות לא נחקרה לעומק התופעה של החזרת גל המאמצים המתקדם בתווך הגרגרי מגבולות התווך בו הוא מצוי, כמו כן גל ההעמסה נוצר מפיצוץ או מאקדח גז דבר שהגביל את השליטה על מאפייני הגל. תופעה מעניינת אחרת, שהתגלתה בשני העשורים האחרונים היא התפרקות גל ארוך לסדרה של גלים קצרים יותר, תיאוריה חדשה שעדיין מתפתחת מתארת את התופעה. מכאן עולה שעריכת מחקר שבו יערכו ניסויים עם אורך גל ארוך תאפשר לחקור את תופעת ההחזרות ולשפוך אור על תופעת התפרקות גל ההעמסה למספר גלים קצרים יותר.

## 1.5 מוטיבציה לעריכת המחקר

במעבדת המחקר לגלי הלם במחלקה להנדסת מכונות באוניברסיטת בן גוריון נערכו מספר מחקרים לבחינת מעבר גל הלם שנוצר בנקבת הלם דרך מצע גרגרי אשר בחנו בעיקר את ההשפעה של המצע על גל ההלם העובר דרכו. היתרון של נקבת ההלם בניסויים מסוג זה הינו היכולת לשלוט בצורה פשוטה יחסית על מאפייני הגל (משך, עוצמה וצורה) תוך הדירות גבוהה בהשוואה לגל הנוצר בפיצוץ חומר נפץ (המלווה בתהליכים אקראיים שאינם ניתנים לשליטה). כמו כן גל ההלם יכול לפגוע בחלקיק בודד או במשטח של חלקיקים בו זמנית, לעומת תא נפץ שהופעל על שני חלקיקים לכל היותר.

שילוב של השיטה הפוטואלסטית עם ניסויים בנקבת הלם יאפשר לשלב את היתרונות של השיטה בתיאור שדה המאמצים הדינאמי המלא בחלקיק עם יתרונות העמסה בנקבת הלם. בנקבה ניתן ליצור גל הלם מצורת מדרגה שיהיה ארוך דיו כדי שניתן יהיה לצפות בהחזרות של גל המאמצים המתקדם דרך התווך הגרגרי משפות תא הניסוי, ולבחון את מאפייני הגל (האם צורת המדרגה נשמרת וכו'). ניסויים דומים עם מדידי מעוות יאפשרו קבלת תמונה מחקרית מלאה יותר.

מטרות מחקר זה הן:

1. לימוד התיאוריה הפוטואלסטית במקרה של העמסה סטאטית ואופן יישומה למקרה של העמסה דינאמית.
2. הקמת מערכת ניסוי המשלבת העמסה של מערך דיסקות גליליות פוטואלסטיות בעזרת גל הלם הנוצר בנקבת הלם.
3. הקמת מערכת אופטית שתאפשר צילום של שדה המאמצים הפוטואלסטי בזמנים דיסקרטיים שונים.
4. שילוב של מדידי מעוות שיודבקו על הדיסקות במערך הניסוי.
5. חקירה של התקדמות גל המאמץ במערך חד מימדי ישר של דיסקות פוטואלסטיות והחזרותיו מגבולות התווך.

## 2 רקע תיאורטי

כפי שנסקר בפרק הקודם מטרת המחקר היא לחקור את ההתקדמות החד מימדית של גל המאמץ בתווך גרגרי והחזרתו מגבולות התווך. כדי לקבל את תמונת שדה המאמצים בצורה ויזואלית בוצעו ניסויים בעזרת שרשרת ישרה של דיסקות העשויות מחומר פוטואלסטי-חומר השובר את האור העובר דרכו בכיווני המאמצים הראשיים. שיטת ניסוי זו מחייבת הבנה של התופעה הפוטואלסטית ושל תאוריה שתתאים לתאור אנליטי של שדה המאמצים בדיסקה, במיוחד באזור המגע שם ריכוז המאמצים גבוה. הניסויים הפוטואלסטיים שולבו עם ניסויים בעזרת מדידי מעוות על מנת לקבל תמונה מלאה ככל האפשר של שדה המאמצים הן מבחינת תאור המאמץ בכל הדיסקה (פוטואלסטיות) והן מבחינת רציפות המדידה בנקודת המגע (מדידי מעוות). לפיכך תובא בפרק זה סקירה של הנושאים הבאים:

1. מדידת מאמצים בעזרת השיטה הפוטואלסטית.
2. פיתרון אנליטי של שדה המאמצים בדיסקה הנתונה להעמסה נורמאלית סימטרית.
3. תיאורית מאמצי המגע של Hertz והשיטה האיטרטיבית של Shukla & Nigham (1985) לחישוב כוח המגע בין שני גופים.
4. השיקולים במדידת מעוותים בעזרת מדידי מעוות בקרבת אזור המגע.

## 2.1 פוטואלסטיות

מדידי מעוות הם האמצעי הנפוץ למדידה עקיפה של מאמצים, אולם לאמצעי זה יש מגבלות. המדיד נותן את מצב המאמצים בנקודה ומספר המדידים שניתן להרכיב מבחינה מעשית מוגבל. השימוש במדידים בעייתי במיוחד באזורים של ריכוזי מאמצים ואזורים של גרדיאנט מאמצים חד, כגון בקרבת אזור המגע בין שתי דיסקות. שימוש בדגם פוטואלסטי יכול לתת פתרון במצבים כאלה כהשלמה לשימוש במדידי מעוותים ולהוסיף מידע על כל שדה המאמצים בדגם. בחלק זה יובא הסבר על השיטה הפוטואלסטית (ללא התעמקות במתמטיקה של גלי האור שאינה רלוונטית למחקר הנוכחי). השיטה מסתמכת על שני עקרונות בסיסיים:

1. פירוס המאמצים וגודלם, בתחום האלסטי, אינו תלוי בתכונות האלסטיות של החומר אלא רק בגיאומטריה של הרכיב ובעומס.
2. ישנם חומרים חדירי אור בעלי תכונות אופטיות התלויות בגודל וכיוון המאמצים הראשיים, חומרים אלו נקראים חומרים פוטואלסטיים. על חומרים אלה נמנים זכוכית ומספר חומרים פולימריים.

### 2.1.1 רקע

אור מתקדם בצורת שדה מגנטי ושדה חשמלי הניצבים זה לזה ולכיוון התקדמותם. השדות מתנדנדים בזמן ובמרחב כאשר אורך גל התנודות (התדירות) קובע את הצבע. בשדות היוצאים ממקור אור לבן גלי התנודות באורכים שונים בעוד במקור אור מונוכרומטי ישנו גל תנודות באורך יחיד. אור רגיל מתפשט בכל מישור במרחב: הקרניים (קו הניצב לחזית הגל ומצביע על כיוון התקדמותו) היוצאות ממקור האור מתפשטות רדיאלית לכל הכיוונים. אור מקוטב קווית (Linear Polarized Light) הינו אור שהשדה החשמלי בו מתנדנד במישור מסוים במרחב. ישנם לייזרים בהם האור מונוכרומטי ומקוטב ליניארית. בהתאבות של קרני אור בקיטובים ליניאריים ניצבים בעלות עוצמה שווה והפרש מופע של רבע גל, מתקבלת קרן בעלת קיטוב מעגלי (מסתובב בזמן). בעזרת מסך קיטוב מישורי או קווי - פולארויד (Plane, or Linear Polarizer), ניתן ליצור אור מקוטב ליניארי ובעזרת פלטת רבע גל ניתן ליצור אור מקוטב מעגלי.

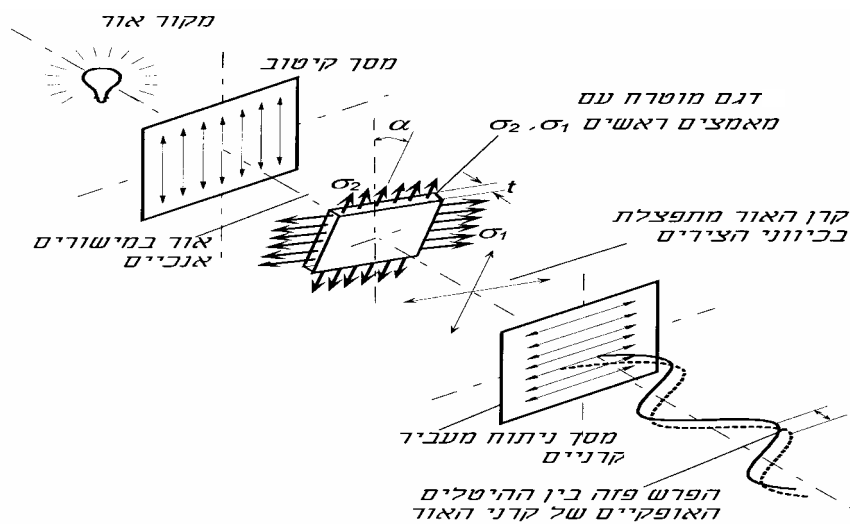
חומר דו שובר (birefringent) הוא חומר בעל אינדקס שבירה שונה בשני כיוונים ניצבים, כך שהמישורים בהם מתנדנדים השדה החשמלי והשדה המגנטי מוסטים. בחומר פוטואלסטי במצב מוטרח, אינדקס השבירה שונה בכל אחד מכיווני המאמצים הראשיים. בהשפעת המאמץ המהירות הקווית של האור בתוך התווך הפוטואלסטי מואטת, ללא השפעה על התדירות (הצבע), מידת ההאטה תלויה בגודל המאמץ. תכונה זו של חומרים פוטואלסטיים מנוצלת לניתוח המאמצים בדגם. הבדיקה מבוצעת במתקן בשם פולאריסקופ (Polariscope).

## 2.1.2 פולאריסקופ

### 2.1.2.1 פולאריסקופ קווי (Linear Polariscopes)

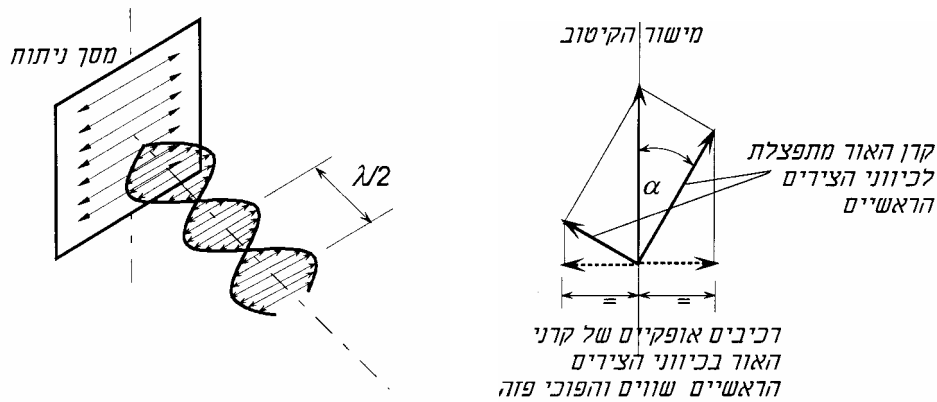
המתקן מורכב מהרכיבים הבאים:

1. מקור אור לבן או מונוכרומטי.
2. מסך קיטוב (Polarizer) מחומר מקטב באוריינטציה ידועה.
3. דגם פוטואלסטי של הרכיב הנבדק.
4. מסך ניתוח (Analyzer) מחומר מקטב.



איור 2.1 : פולאריסקופ קווי (מישורי), הטכניון (2000)

כאשר אין דגם או כאשר הדגם אינו מוטרך ומסך הניתוח באותה אוריינטציה כמו מסך הקיטוב כל האור חודר דרך מסך הניתוח-זהו שדה לבן (White Field). אם אוריינטצית הקיטוב של מסך הניתוח ניצבת לזו של מסך הקיטוב לא חודר כל אור-זהו שדה שחור (Dark Field). לשם הנוחות ההסבר מתייחס לשדה שחור למרות שבשני המקרים מתקבלת אותה תופעה למעט הבדל שיוסבר בהמשך. קרן האור המגיעה לדגם המוטרך מתפצלת לשני רכיבים בכיווני המאמצים הראשיים, גודל (אמפליטודה) הרכיבים תלוי בזווית נטיית הצירים הראשיים למישור הקיטוב של האור, אולם היטלי הרכיבים על מישור הקיטוב של מסך הניתוח הם בעלי אמפליטודות שוות ופאזה הפוכה (הפרש פזה של 180 מעלות – חצי אורך גל), ללא תלות בכיווני המאמצים הראשיים (איור 2.2).



איור 2.2 : מעבר האור דרך הפולאריסקופ, הטכניון (2000)

אם האור הוא מונוכרומטי שני הרכיבים היוצאים ממסך הניתוח הם בעלי אמפליטודה ותדירות שוות, אולם עקב המהירויות השונות בכיווני הצירים הראשיים נוצר הפרש פאזה בניהם בנוסף להיפוך הפאזה הראשוני. גודל הפרש הפאזה הוא ביחס ישר להפרש המאמצים הראשיים שהוא פעמיים מאמץ הגזירה המקסימאלי:

$$2\tau_{\max} = \sigma_1 - \sigma_2 \quad (2.1)$$

כתוצאה מתהליך זה נוצרים באור היוצא פסים כהים ובהירים לסירוגין על פני הדגם הנקראים פרינגים (Fringes) ואם מקור האור הוא אור לבן הפסים הם גם בצבעים שונים. פסים אלה הם משני סוגים ומשקפים שתי תופעות שונות:

1. קווים שווי נטייה – איזוקלינות (Isoclinic Lines) אלה פסים כהים שלאורכם כיוון הצירים הראשיים מקביל לכיווני הקיטוב של המסכים המקטבים. בכיוונים אלה יש רק רכיב אחד לאור בתוך הדגם- הרכיב המקביל לכיוון הקיטוב של מסך הקיטוב, ורכיב זה מתבטל ע"י מסך הניתוח.

2. קווים שווי צבע (או שווי תדירות) – איזוכרומטות (Isochromatic Lines). באור מונוכרומטי פסים אלה כהים ובהירים לסירוגין. הפסים הכהים תואמים את האזורים שבהם הפרש המאמצים הראשיים הוא כזה שהפרש הפאזה בין שני רכיבי קרן האור הוא כפולה אי זוגית של חצי אורך גל. במצב זה שני הרכיבים בפאזה הפוכה ומכוון שהם באמפליטודה ותדירות שוות, הם מבטלים זה את זה. קווים אלה מייצגים קווים "שווי מאמץ גזירה מקסימאלי". באור לבן כל צבע (כלומר תדירות) מתבטל או מתחזק לאורך איזוכרומטה שונה כי הוא בעל אורך גל שונה, הצבעים הנראים לעין משקפים את האור שבו חסר הצבע מתבטל (למשל אם האדום חסר, האור הנראה הוא ירוק וכו'). אם עוקבים אחרי צבע מסוים, הקו המתקבל הוא האיזוכרומטה המתאימה להפרש מאמצים

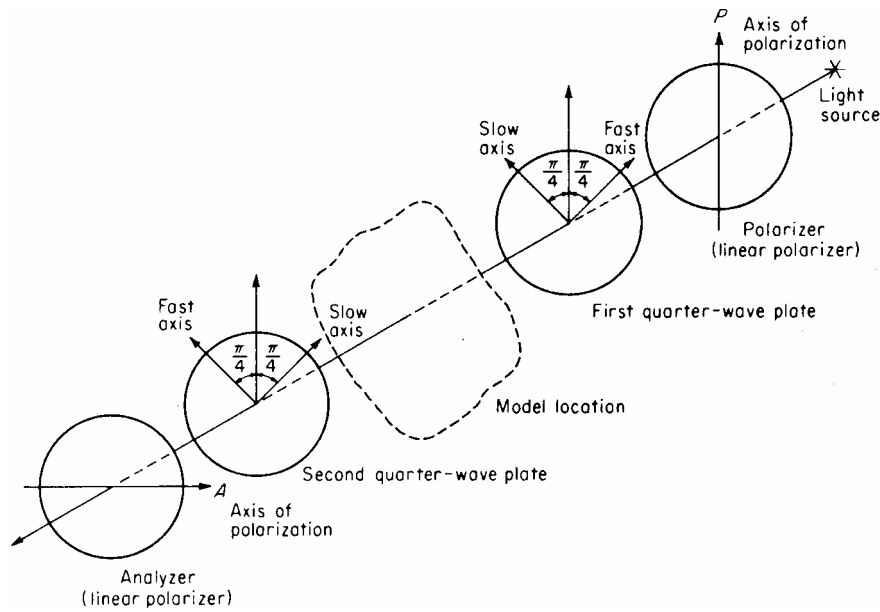


ראשיים מסוים. כאשר משתמשים בשדה לבן, כלומר מכוונים את מסך הניתוח באותה אוריינטציה כמו מסך הקיטוב, היטלי הרכיבים על מישור הקיטוב של מסך הניתוח ללא הטרחת הדגם הם בעלי אמפליטודות שוות וללא הפרש פאזה. במקרה זה הפסים הכהים תואמים את האזורים שבהם הפרש המאמצים הראשיים הוא כזה שהפרש הפאזה בין שני רכיבי קרן האור הוא כפולה זוגית של חצי אורך גל.

ניתן להבדיל בין שני סוגי הקווים בשני אופנים: באור לבן האיזוקלינות מופיעות כפסים כהים (שחורים) בעוד האיזוכרומטות מופיעות כקווים צבעוניים. אור מונוכרומטי נותן רזולוציה טובה יותר מאשר אור לבן, ולכן עדיף להשתמש באור כזה לצורך ניתוח כמותי. ע"י שימוש בשני סוגי האור ניתן להבחין בין שני סוגי הקווים ולהתייחס אליהם בנפרד. שיטה אחרת היא לשנות את העומס, כיוון הצירים הראשיים אינו משתנה ולכן רק האיזוכרומטות משתנות. שיטה שלישית מוציאה לחלוטין את קווי האיזוקלינה ע"י שימוש במקטבים מסוג מיוחד המוצבים בין דגם למסכי הקיטוב, סידור זה הופך את הפולאריסקופ הקווי לפולאריסקופ מעגלי (Circular Polariscopes).

### 2.1.2.2 פולאריסקופ מעגלי (Circular Polariscopes)

מתקן זה הינו פולאריסקופ מישורי אשר הוספו לו שני אלמנטים אופטיים הנקראים לוחות רבע גל (Quarter Wave Plate) בין הדגם למסכי הקיטוב (איור 2.3). לוח גל מפריד את ווקטור האור העובר דרכו לשני רכיבים ניצבים ומעביר אותם במהירויות שונות – ציר מהיר וציר איטי, הפרש המהירויות גורם להפרש פאזה בין הרכיבים, בפלטת רבע גל נוצר הפרש פאזה של 90 מעלות. התאבכות של קרני האור המקוטבות עם הפרש מופע של רבע גל יוצרת קרן בעלת קיטוב מעגלי, לכן האור נקרא אור מקוטב מעגלי (Circular Polarized Light). בפולאריסקופ מעגלי פלטת רבע הגל הקרובה ללוח הקיטוב נוטה ב 45 מעלות לציר הקיטוב. פלטת רבע הגל השנייה מכוונת כך שהציר המהיר שלה יתלכד עם הציר האיטי של הפלטה הראשונה וההיפך. סידור זה גורם לביטול רכיב האור המקביל לכיוון הקיטוב של מסך הקיטוב, כלומר להעלמת קווי האיזוקלינות ולהדגשת קווי האיזוכרומטות.



איור 2.3 : פולאריסקופ מעגלי (Dally & Riley (1978)

### 2.1.2.3 חישוב מאמצים עפ"י סדר הפס

כאמור, בעזרת קווי האיזוכרומטות ניתן לחשב את הפרשי המאמצים הראשיים  $\sigma_1 - \sigma_2$ . גודל זה נתון ע"י הביטוי:

$$2\tau_{\max} = \sigma_1 - \sigma_2 = \frac{N \cdot f_{\sigma}}{h} \quad (2.2)$$

$f_{\sigma}$  - הקבוע הפוטואלסטי של החומר. ערך זה נתון ע"י היצרן, אך יכול להשתנות עקב חשיפה ללחות, עיבוד שבבי ושינויי טמפרטורה. כדי לדעת את הערך המדויק יש לערוך ניסוי כיול לחומר. שיטות למדידת הקבוע הפוטואלסטי מופיעות בנספח 2.  $h$  - עובי הדגם.

$N$  - סדר הקו האיזוכרומטי המתאים לכפולות של חצאי אורך גל.

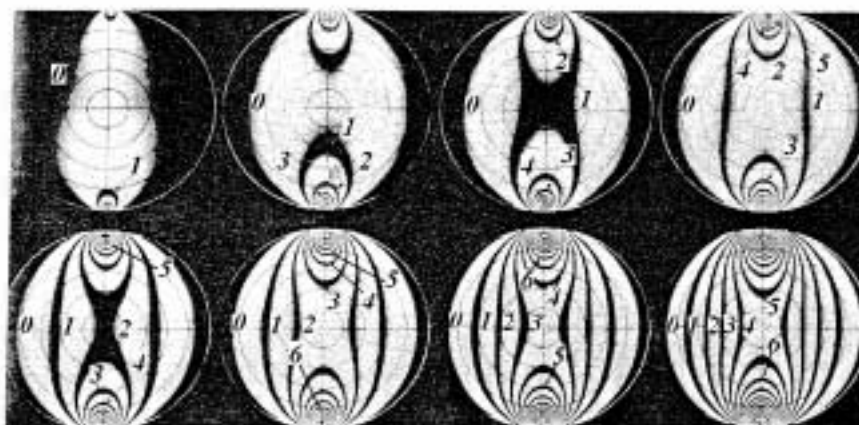
- באור מונוכרומטי וסידור של שדה שחור (ציר הקיטוב של לוח הניתוח נוטה ב 90 מעלות לציר הקיטוב של הלוח המקטב), סדר הפס הינו מספר שלם:  $N=0, 1, 2, 3, \dots$ . פס מסדר אפס יופיע בצבע שחור גם באור לבן באזורים בהם המאמץ אפס.
- באור מונוכרומטי וסידור של שדה לבן (ציר הקיטוב של לוח הניתוח באותו כיוון של ציר הקיטוב של הלוח המקטב), סדר הפס הינו מספר שלם ועוד חצי:  $N=0.5, 1.5, 2.5, 3.5, \dots$
- באור לבן וסידור של שדה שחור מספר זה מכיל גם עפ"י צבע קו האיזוכרומטה (טבלה

(2.1)

Color	Fringe Order $N$
Black	0
Gray	0.28
White	0.45
Pale Yellow	0.60
Orange	0.80
Dull Red	0.90
Purple (Tint of Passage)	1.00
Deep Blue	1.08
Blue-Green	1.22
Green-Yellow	1.39
Orange	1.63
Rose Red	1.82
Purple (Tint of Passage)	2.00
Green	2.35
Green-Yellow	2.50
Red	2.65
Red/Green Transition	3.00
Green	3.10
Pink	3.65
Pink/Green Transition	4.00
Green	4.15

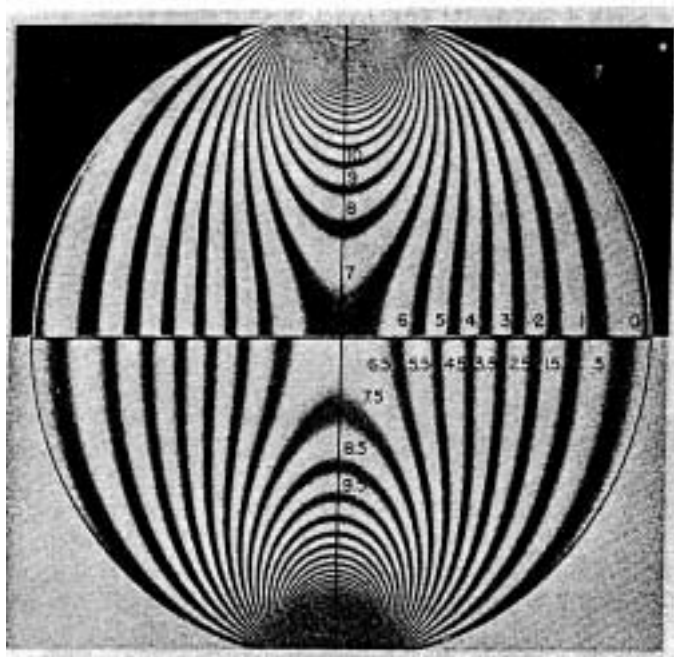
טבלה 2.1: ערך סדר הפס למקור אור לבן (Vishay data sheet)

עבור שדה לבן יש להוסיף 0.5 לערכים בטבלה 2.1. בדיסקה הנתונה להטרחת של זוג כוחות מנוגדים הפועלים לאורך אותו ציר, סדר הפס הקרוב לשפה החופשית יהיה מסדר אפס ויעלה ככל שנתקדם דרך פנים הדיסקה אל אזור ההטרחת כמוראה באיור 2.4:



איור 2.4: התפתחות האיזוכרומטות עם העלאת העומס בדיסקה פוטואלסטית הנתונה להטרחת ניצבת. (Durelli & Riley 1965)

ע"י שילוב של ניסויים בשדה שחור ובשדה לבן, ניתן להעלות את הרזולוציה (איור 2.5). ניתן לראות שבקרבת אזור המגע עם הכוחות ישנו ריכוז מאמצים גבוה המתבטא בצפיפות הפסים.



איור 2.5 : שילוב של איזוכרומטות בשדה שחור ובשדה לבן בדיסקה הנתונה להטרחה ניצבת

Durelli & Shukla (1983) רכזו את הכללים על פיהם ניתן לאבחן את סדר הפס בדגמים בהם התפלגות העומס לא ברורה כמו במקרה של דיסקה מעגלית.

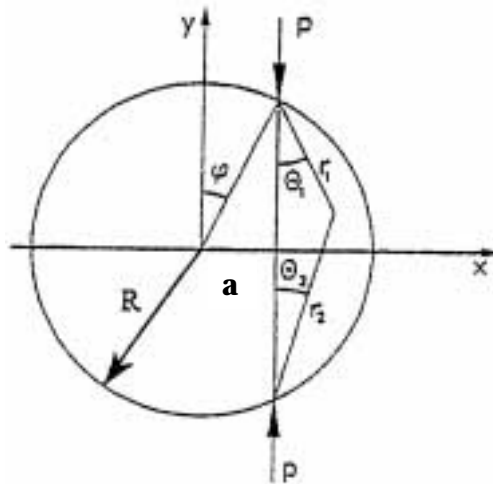
## 2.2 שדה המאמצים בדיסקה

בניסוי דינאמי אנו יוצרים בעזרת נקבת הלם גל הלם מסוג מדרגה שעוצמתו קבועה במשך כ 6 msec. גל זה פוגע בשרשרת של דיסקות בקוטר 20 מ"מ המונחות זו על זו בצורה אנכית ויוצר גל מאמץ המתקדם ומוחזר דרך השרשרת ומועבר מדיסקה לדיסקה דרך אזור מגע קטן בניהם. מאחר וזמן המעבר של גל המאמץ דרך דיסקה בודדת (מנקודת מגע אחת לשנייה) הוא כ  $40 \mu\text{sec}$  - קטן בשני סדרי גודל מאורך גל ההלם בנקבה ומאחר שתופעת שינוי המאמצים בזמן אינה מהירה יחסית להפרשי הזמנים בין צילום לצילום, ניתן להניח כי ניתן להתייחס למצב מאמצים רגעי כפי שמונצח בצילום בודד כ"כאילו סטטי" (Quasi-Static), (Shukla & Damania, 1987). מאחר והניתוח הסטטי הוא יותר פשוט, ישנה מוטיבציה להבין תחילה כיצד מתפלגים המאמצים בדיסקה בודדת במקרה של העמסה סטטית ומה קורה באזור המגע בין הדיסקות ולנסות ליישם זאת לניתוח שדה המאמצים המתקבל בתנאי העמסה דינאמיים.

### 2.2.1 פיתרון אנליטי של שדה המאמצים בדיסקה הנתונה להטחה סטטית

#### נורמאלית

בספר Theory of Elasticity של Timoshenko & Goodier (1951) מובא פיתרון לחישוב שדה המאמצים עבור דיסקה הנתונה לפעולת כוחות שווים בגודלם והפוכים בכיוונם המסומנים באות P כמוראה באיור 2.6. הוא כוח ליחידת רוחב של הדיסקה.



איור 2.6 : הסימנים הקשורים לתיאור שדה מאמצים בדיסקה תחת עומס סטטי

נורמאלי Sienkiewicz et al. (1996)

נקודת ראשית הצירים עוברת דרך מרכז המעגל והווקטורים  $r_1$  ו  $r_2$  מצביעים על מיקום הקואורדינאטה בה נרצה לחשב את המאמץ.

שדה המאמצים למקרה זה נתון ע"י המשוואות הבאות :

$$\sigma_{xx} = -\frac{2P}{\pi} \cdot \left[ \frac{\sin^2(\theta_1)\cos(\theta_1)}{r_1} + \frac{\sin^2(\theta_2)\cos(\theta_2)}{r_2} \right] + \frac{P \cdot \cos(\varphi)}{\pi \cdot R} \quad (2.3)$$

$$\sigma_{yy} = -\frac{2P}{\pi} \cdot \left[ \frac{\cos^3(\theta_1)}{r_1} + \frac{\cos^3(\theta_2)}{r_2} \right] + \frac{P \cdot \cos(\varphi)}{\pi \cdot R} \quad (2.4)$$

$$\tau_{xy} = \frac{2P}{\pi} \cdot \left[ \frac{\sin(\theta_1)\cos^2(\theta_1)}{r_1} - \frac{\sin(\theta_2)\cos^2(\theta_2)}{r_2} \right] \quad (2.5)$$

על מנת לחשב את הזוויות  $\theta_1$  ו  $\theta_2$ , נשתמש בסימוני עזר הבאים :

a – המרחק האופקי ממרכז הדיסקה לנקודת הפעלת הכוח.

l – המרחק האנכי ממרכז הדיסקה לנקודת הפעלת הכוח.

אם ידועים לנו רדיוס הדיסקה R ואחד המרחקים l או a, ניתן לחשב את שאר הגדלים עבור כל קואורדינאטה (x,y) עפ"י היחסים הטריגונומטריים הבאים :

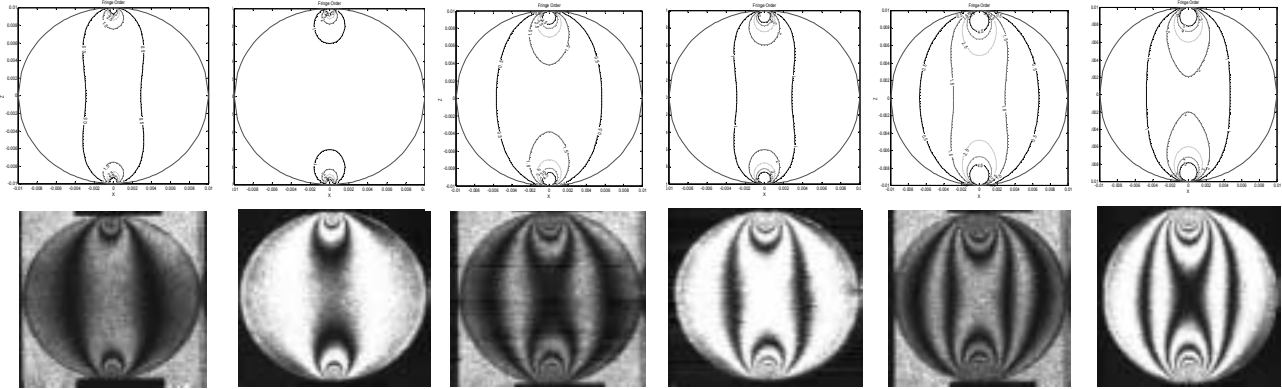
$$\begin{aligned} \varphi &= \sin^{-1}\left(\frac{a}{R}\right) \\ l &= R \cdot \cos(\varphi) \\ r_1 &= \sqrt{(x-a)^2 + (y-l)^2} \\ r_2 &= \sqrt{(x-a)^2 + (y+l)^2} \\ \theta_1 &= \sin^{-1}\left(\frac{x-a}{r_1}\right) \\ \theta_2 &= \sin^{-1}\left(\frac{x-a}{r_2}\right) \end{aligned} \quad (2.6)$$

במקרה שקווי פעולת הכוחות מתלכדים עם ציר y כלומר a=0 אזי  $\varphi = 0$  ו  $l=R$  - זהו המקרה הרלוונטי לניסוי.

למשוואות אלו דיוק גבוה ומשתמשים בהן על מנת למצוא את הקבוע הפוטואלסטי  $f_\sigma$  של החומר הפוטואלסטי כפי שמוסבר בנספח 2. על מנת להשוות את תמונת המאמצים בדיסקה שמתקבלת מהמשוואות עם זו המתקבלת מניסוי פוטואלסטי יש למצוא את מאמץ הגזירה המקסימאלי ולהמירו לסדר פס עפ"י הקשר הבא :

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{N \cdot f_\sigma}{2h} \quad (2.7)$$

באיור 2.7 מוצגת השוואה של פילוג סדר פס שהתקבל מניסוי לחיצה סטאטי בדיסקה פוטואלסטית שבוצע במעבדה והצגה גראפית בעזרת תוכנת Matlab של זה המתקבל מן המשוואות, ניתן לראות כי יש התאמה טובה בניהם.

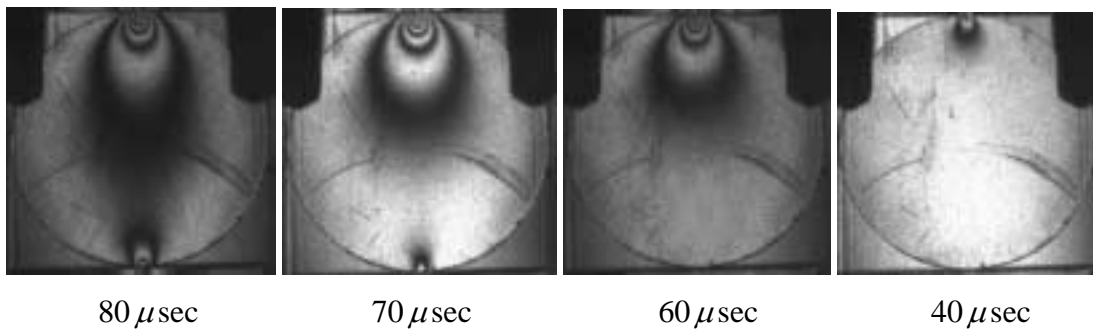


שדה שחור 150N שדה לבן 150N שדה שחור 100N שדה לבן 100N שדה שחור 50N שדה לבן 50N

איור 2.7 : השוואה בין ניסוי סטאטי לתיאוריה

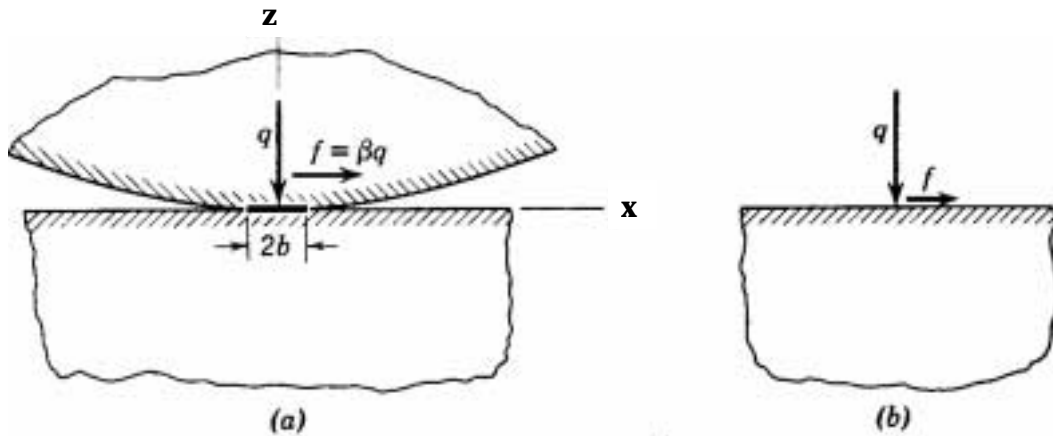
### 2.2.2 תיאורית מאמצי המגע של הרץ (Hertz)

המשוואות שתוארו בסעיף הקודם מתאימות למצב של הטרחה סטאטית ולביצוע כיוול של הקבוע הפוטואלסטית, אך דיוקן יורד בקרבת אזור המגע שם ריכוז המאמצים גבוה ונוצרת דפורמציה מקומית. כמו כן במצב של הטרחה דינאמית גל המאמץ מגיע לנקודת המגע בין שתי דיסקות ומתקדם לנקודת המגע עם הדיסקה הבאה תוך שינוי ערך המאמץ (איור 2.8). כלומר, המאמץ אינו סימטרי בשני חצאי הדיסקה ולכן משוואות אלו לא מתאימות ויש לעבור לתיאוריה שתתאר את המאמצים באזור המגע בין שתי דיסקות – התיאוריה של הרץ (Hertz).



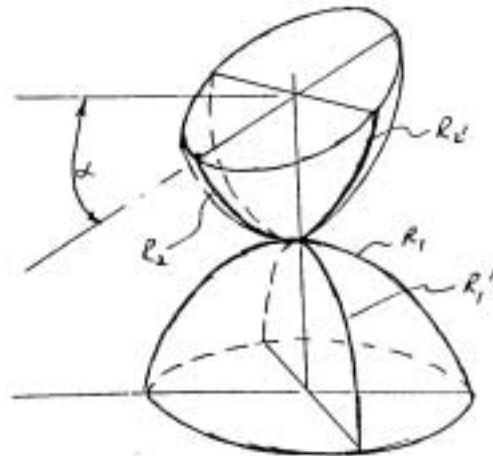
איור 2.8 : התפתחות המאמץ בדיסקה בודדת בקוטר 20 מ"מ

איור 2.9 מיצג חתך של גליל אלסטי הנח על גבי משטח של גוף אלסטי. הגליל נמצא תחת השפעת כוח ליחידת רוחב  $q$ , הלוחץ אותו אל המשטח דרך שטח מגע מלבני ברוחב  $2b$ . כוח משיק (ליחידת רוחב)  $f$  מופעל אף הוא על הגוף. נגדיר את  $\beta$  כמקדם החיכוך כך ש  $f = \beta \cdot q$ .



איור 2.9 : אזור מגע בין שני גופים (Shukla & Nigham (1985)

Smith & Chang (1953) פיתחו משוואות המתארות את שדה המאמצים באזור המרוחק עד  $8b$  מנקודת המגע, כאשר האינדקסים 1 ו 2 מתייחסים לשני הגופים שרדיוסי העקמומיות שלהם הם  $R_1, R_1'$  ו  $R_2, R_2'$  בהתאמה עם זווית  $\alpha$  בין מישורי העקמומיות (איור 2.10).



איור 2.10 : רדיוסי העקמומיות של שני גופים המונחים האחד על גבי השני, (Schulgasser (1998)



מאחר ונוצרת דפורמציה מקומית באזור המגע יש לקחת בחשבון גם את מודול יאנג ומודול פואסון של החומר :

$$\Delta = \frac{1}{A+B} \left( \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right) \quad (2.8)$$

(2.9)

$$A = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1'} + \frac{1}{R_2'} \right) + \frac{1}{4} \sqrt{\left[ \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_1'} \right) + \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_2'} \right) \right]^2 - 4 \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_1'} \right) \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_2'} \right) \sin^2 \alpha} \quad (2.10)$$

$$B = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1'} + \frac{1}{R_2'} \right) - \frac{1}{4} \sqrt{\left[ \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_1'} \right) + \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_2'} \right) \right]^2 - 4 \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_1'} \right) \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_2'} \right) \sin^2 \alpha}$$

את חצי רוחב שטח המגע ניתן לחשב ע"י הקשר :

$$b = \sqrt{\frac{2q\Delta}{\pi}} \quad (2.11)$$

המאמץ בכיוון z :

$$\sigma_{zz} = -\frac{b}{\pi\Delta} \left\{ z(b\phi_1 - x\phi_2) + \beta z^2 \phi_2 \right\} \quad (2.12)$$

המאמץ בכיוון x :

$$\sigma_{xx} = -\frac{b}{\pi\Delta} \left\{ z \left( \frac{b^2 + 2z^2 + 2x^2}{b} \phi_1 - \frac{2\pi}{b} - 3x\phi_2 \right) + \beta [(2x^2 - 2b^2 - 3z^2)\phi_2 + \frac{2\pi x}{b} + 2(b^2 - x^2 - z^2) \frac{x}{b} \phi_1] \right\} \quad (2.13)$$

מאמץ הגזירה :

$$\tau_{zx} = -\frac{b}{\pi\Delta} \left\{ z^2 \phi_2 + \beta [(b^2 + 2x^2 + 2z^2) \frac{z}{b} \phi_1 - \frac{2\pi z}{b} - 3xz\phi_2] \right\} \quad (2.14)$$

כאשר  $\phi_1$  ו  $\phi_2$  נתונים ע"י הקשרים:

$$\phi_1 = \frac{\pi(M + N)}{MN\sqrt{2MN + 2x^2 + 2z^2 - 2b^2}} \quad (2.15)$$

$$\phi_2 = \frac{\pi(M - N)}{MN\sqrt{2MN + 2x^2 + 2z^2 - 2b^2}} \quad (2.16)$$

ו  $N$  ו  $M$  מוגדרים באופן הבא:

$$N = \sqrt{(b-x)^2 + z^2} \quad M = \sqrt{(b+x)^2 + z^2} \quad (2.17)$$

עבור דיסקה (גליל)  $R_1$  יהיה רדיוס הגליל,  $R_2 \rightarrow \infty$  ו  $\alpha = 90^\circ$ . עבור משטח ישר שני רדיוסי העקמומיות ישאפו לאינסוף.

### 2.2.3 חישוב כוח המגע עפ"י הרץ (Hertz)

במקרה של ניסויים בתנאי הטרחה דינאמיים במודל פוטואלסטי, גודל כוח המגע אינו ידוע ומשתנה מצילום לצילום בזמן, אך ניתן לדעת מהתמונה הפוטואלסטית את סדר הפס של האיזוכרומטות בקרבת אזור המגע ולחשב בעזרת הקבוע הפוטואלסטי את מאמץ הגזירה המקסימאלי. בהתבסס על עיקרון זה פותחה ע"י Shukla & Nigham (1985) סכימה איטרטיבית המחשבת את שטח המגע (ומכאן גם את הכוח) ומקדם החיכוך בין שני גופים. הרעיון הוא לשלב את משוואות מאמצי המגע 2.12, 2.13, 2.14 עם הקשר הפוטואלסטי במשוואה 2.7. משוואה זו אינה ליניארית עבור שני הנעלמים  $b$  ו  $\beta$  ותיפתר בעזרת שיטת ניוטון-ראפסון (Newton-Raphson). לפי השיטה נגדיר פונקציה  $g$  המבוססת על משוואה 2.7:

$$g_k = (\sigma_1 - \sigma_2) - \frac{Nf_\sigma}{h} = 0 \quad (2.18)$$

האינדקס  $k$  מתייחס למספר אקראי של נקודות באזור המגע מהם נוציא את נתוני האיזוכרומטות (סדר הפס).

אם הערכה ראשונית לערכי הנעלמים  $b$  ו  $\beta$  תוצב במשוואה 2.18 נקבל ש  $g_k \neq 0$  מאחר וההערכה אינה מדויקת. כדי לשפר את ההערכה, מספר משוואות איטרטיביות המבוססות על פיתוח לטור טיילור של  $g_k$  יובילו לקשר התיקון הבא:

$$\left(\frac{\partial g_k}{\partial b}\right)_i \Delta b + \left(\frac{\partial g_k}{\partial \beta}\right)_i \Delta \beta = -(g_k)_i \quad (2.19)$$

האינדקס  $i$  מתייחס למספר האיטרציה.

יישום הסכימה האיטרטיבית המוצעת במשוואה 2.18 ל k משוואות מהצורה של משוואה 2.19 מוביל לסט של משוואות ליניאריות עם ערכי התיקון  $\Delta b$  ו  $\Delta \beta$  הנתון ע"י:

$$\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \bullet \\ \bullet \\ g_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial g_1 / \partial b & \partial g_1 / \partial \beta \\ \partial g_2 / \partial b & \partial g_2 / \partial \beta \\ \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \\ \partial g_k / \partial b & \partial g_k / \partial \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta b \\ \Delta \beta \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

משוואה 2.20 יכולה להירשם בצורה מקוצרת:

$$[g] = [a][\Delta c] \quad (2.21)$$

כעת ניתן לחשב את  $[\Delta c]$  מהקשר:

$$[\Delta c] = [d]^{-1} [e] \quad (2.22)$$

כאשר  $[e] = [a]^T [g]$  ו  $[d] = [a]^T [a]$ . הפיתרון של משוואה 2.21 נותן את ערכי התיקון  $\Delta b$  ו  $\Delta \beta$  שבעזרתם ניתן לשפר את ההערכה הראשונית של  $b$  ו  $\beta$  ע"י:

$$b_{i+1} = b_i + \Delta b \quad (2.23)$$

$$\beta_{i+1} = \beta_i + \Delta \beta \quad (2.24)$$

התכנסות השיטה מהירה – כעשר איטרציות מספיקות בד"כ לקבלת הערכים המדויקים של  $b$  ו  $\beta$ . כעת ניתן לחשב את ערכו של הכוח הנורמאלי שמופעל בנקודת המגע:

$$P = \frac{\pi \cdot h \cdot b^2}{2 \cdot \Delta} \quad (2.25)$$

במקרה של שרשרת ישרה של דיסקות לא פועל כוח בכיוון האופקי ולכן במקרה זה  $\beta = 0$ .

### 2.3 מדידת מעוותים בקרבת אזור המגע

כאמור מדידי מעוות נותנים מידע נקודתי בלבד על המעוותים, לעומת השיטה הפוטואלסטית שנותנת מידע על שדה המאמצים בכל הדיסקה, אך בניסויים דינאמיים יש למדידה בעזרתם ערך רב: בניסוי בודד מתקבל מידע רציף לאורך זמן דבר המאפשר לצפות בכל תופעת מעבר גל המאמץ והחזרתו משפות תא הניסוי. לכן שילוב של צילום שדה המאמצים הפוטואלסטי בזמנים דיסקרטיים יחד עם מדידי מעוות נותן תמונה מלאה יותר של התופעות הנמדדות הן מבחינת רציפות המדידה לאורך זמן והן מבחינת כיסוי מלא של שדה המאמצים בתוך הגרגרי.

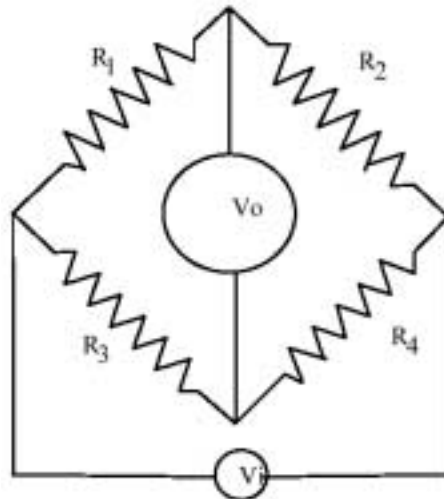
#### 2.3.1 רקע

ישנם מספר שיטות למדידת מעוותים אשר הנפוצה בהם מתבססת על עיקרון של שינוי התנגדות. מדי המעוות הם למעשה נגדים גמישים המודבקים על הדגם במקום בו מעוניינים לבדוק את המעוות. המעוות בדגם גורם להתארכות (או התקצרות) המדיד, דבר המשנה את התנגדותו עפ"י הקשר:

$$R = \frac{\rho \cdot l}{A} \quad (2.26)$$

$\rho$  - התנגדות סגולית של החומר ממנו עשוי הנגד,  $l$  - אורך הנגד,  $A$  - שטח החתך של הנגד.

מאחר והשינוי בהתנגדות קטן, יש לחבר את הנגד למעגל חשמלי בסידור כזה שיהיה רגיש לשינוי, מעגל זה ידוע בשם גשר ויטסטון (איור 2.11) והוא נמצא בתוך המגברים המסחריים למדידי מעוות.



איור 2.11 : גשר ויטסטון, מעבדת מכשור ומדידות (2000)

היחס בין מתח אי האיזון  $V_0$  למתח הכניסה  $V_i$  המסופק למעגל נתון ע"י הקשר :

$$\frac{V_0}{V_i} = \frac{R_1 \cdot R_4 - R_2 \cdot R_3}{(R_1 + R_2) \cdot (R_3 + R_4)} \quad (2.27)$$

כאשר כל הנגדים שווים בערכם הגשר מאוזן ולכן מתח אי האיזון  $V_0 = 0$ .

ישנן תצורות שונות לחיבור הגשר שבהן ניתן למדוד שינוי התנגדות כתוצאה ממעוותים מסוג מסוים תוך קיזוז השפעת שינויי התנגדות שנוצרים ממאמצים מסוג אחר (לדוגמה: כפיפה ולחיצה טהורה במוט) או כתוצאה משינוי טמפרטורת הסביבה. מאחר ובניסויים טמפרטורת הסביבה נשארה קבועה והמאמץ אותו נרצה למדוד הוא מסוג לחיצה, להלן יינתן הסבר רק על התצורה של חיבור מדיד יחיד למעגל - חיבור רבע גשר.

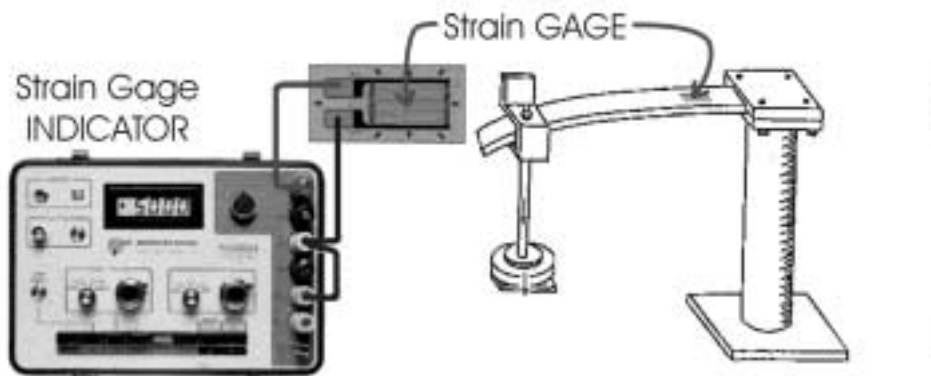
בחיבור רבע גשר  $R_1$  הוא מדיד מעוות פעיל שערכו  $R_1 = R \cdot (1 + \delta)$  כאשר  $\delta$  הוא השינוי בהתנגדות כתוצאה ממעוות וערך שאר הנגדים קבוע  $R_2 = R_3 = R_4 = R$ . מאחר ו  $\delta \ll 2$  הצבת הנתונים למשוואה 2.27 תתן :

$$\frac{V_0}{V_i} = \frac{R(1 + \delta) \cdot R - R \cdot R}{R(1 + \delta + 1) \cdot (R + R)} = \frac{\delta}{4} \quad (2.28)$$

לכל מדיד מעוות ישנו גורם גשר (Gauge Factor) המבטא את היחס בין המעוות לשינוי בהתנגדות :

$$G.F = \frac{\delta \cdot R}{R} \bigg/ \frac{\Delta l}{l} = \frac{\delta}{\varepsilon} \quad (2.29)$$

המגבר מבצע את הפעולה  $\frac{V_0 \cdot 4}{V_i \cdot G.F.}$  על מנת לחשב את המעוות.



מדידת מעוותי כפיפה בקורה בעזרת מדיד מעוות (Unknown)

איור 2.12 :

### 2.3.2 התאמה של שיטת מדידת מעוותים לניסוי

הניסויים נועדו לבדוק את ההתקדמות וההחזרות של גל המאמץ בשרשרת ישרה של דיסקות. גל המאמץ מועבר בין שתי דיסקות דרך אזור מגע צר, דבר היוצר ריכוז מאמצים גדול בקרבת נקודת המגע, לכן בבואנו לבחור את גודל מדיד המעוות ואת המיקום האידיאלי עלינו להתחשב במספר גורמים:

1. כדי לחשב עפ"י המעוות הנמדד את המאמצים ואת כוח המגע בין הדיסקות, מיקום המדיד צריך להיות באזור שבו תיאורית מאמצי המגע של Hertz תהיה תקפה, כלומר במרחק שלא יעלה על ארבע פעמים רוחב אזור המגע (8b).

2. באזור המגע ישנו גרדיאנט מאמצים חד, דבר היכול להכניס שגיאה גדולה במדידה ולכן מיקום המדיד צריך להיות רחוק מספיק מנקודת המגע כדי לא להיות מושפע מכך אך עדיין בתחום התקפות של התיאוריה של Hertz.

3. המדיד מבצע מיצוע של המעוות בשטח אותו הוא מכסה, לכן באזור המגע יש לבחור מדיד קטן ככל האפשר, אך מאחר ושטח פינוי החום מהמדיד גם יקטן יש לבחור מדיד בגודל המקסימאלי כך שהשגיאה בקריאתו תהיה עדיין קטנה.

4. הדיסקות עליהם מדביקים את המדידים עשויות מחומר פלסטי שלא מפנה טוב את החום, בנוסף למדיד קטן יש שטח מעבר חום קטן ולכן יש לבחור ערכי התנגדות חשמלית ומתח הזנה לגשר ויטסטון מתאימים.

5. זמן התגובה של המדיד והמגבר.

### 2.3.2.1 בחירת מיקום המדיד

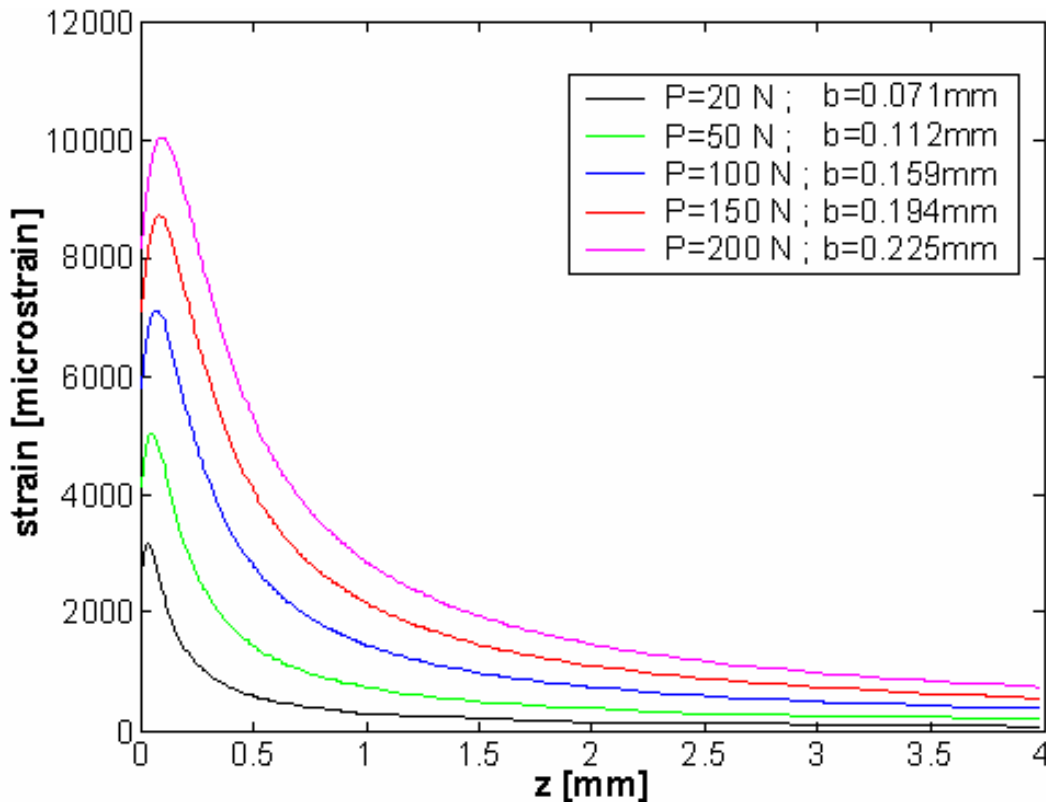
מאחר והניסויים נערכו בשרשרת ישרה, נקודות המגע בין הדיסקות עוברות דרך הקוטר האנכי, כלומר ב  $x=0$  ולכן גם המדיד ימוקם ב  $x=0$ . המיקום על ציר  $z$  יהיה בנקודה הקרובה ביותר לנקודת המגע שבה גרדיאנט המאמצים לא יהיה חד. Xu & Shukla (1993) ניתחו את המיקום האידיאלי למד מעוות בקרבת אזור המגע עפ"י משוואות מאמצי המגע אותם קישרו למעוות עפ"י:

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E}(\sigma_{zz} - \nu\sigma_{xx}) \quad (2.30)$$

הצבה של  $x=0$  ו  $\beta = 0$  (שרשרת ישרה) במשוואות 2.12, 2.13 והצבת  $\sigma_{xx}$  ו  $\sigma_{zz}$  במשוואה 2.30 תיתן את הקשר בין המעוות הנמדד לרוחב שטח המגע  $2b$  בתלות בקואורדינטה  $z$ :

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{1}{E} \left[ \frac{(1-\nu)b^2 - 2\nu z^2}{\Delta\sqrt{b^2 + z^2}} + \frac{2\nu z}{\Delta} \right] \quad (2.31)$$

בניסוי כוח המגע משתנה עד ל 200 ניוטון לערך, לכן רוחב שטח המגע (עפ"י משוואה 2.25) יגיע עד ל 0.23 מ"מ. הצבה של ערכים אלו למשוואה 2.31 מאפשרת להעריך את גרדיאנט המעוותים לאורך ציר  $z$  עבור שטחי מגע שונים כמוראה באיור 2.13.

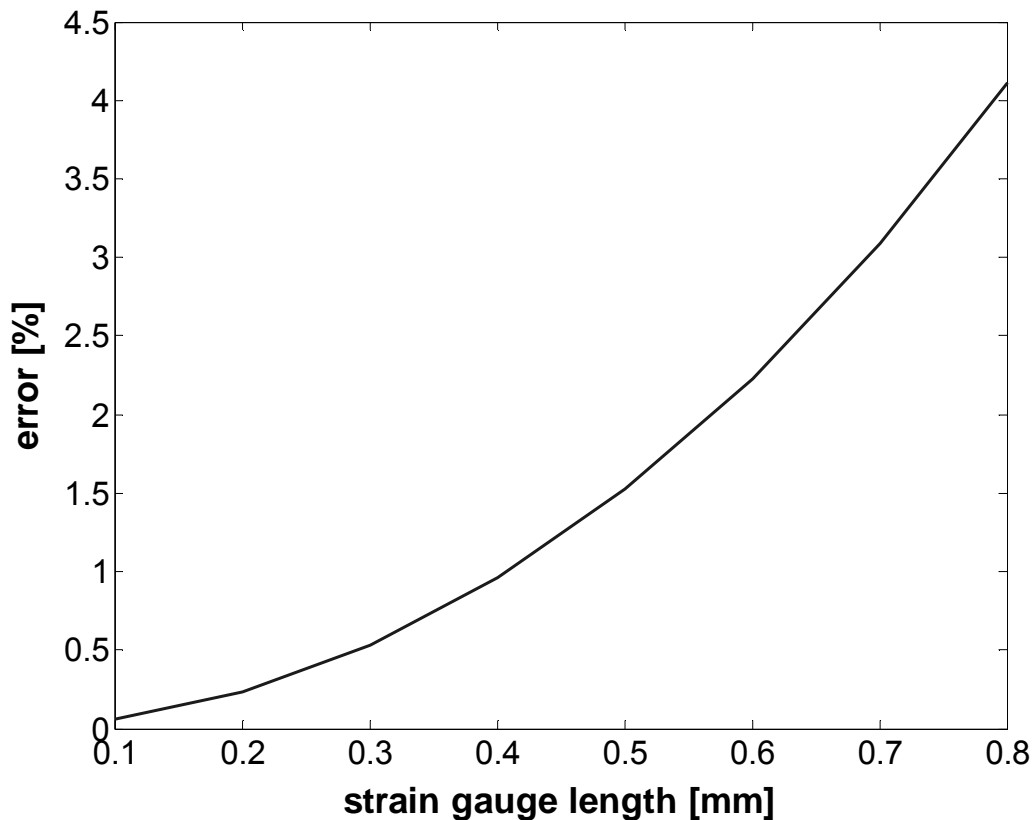


איור 2.13 : גרדיאנט המעוות באזור המגע

ניתן לראות שהדבקת מד המעוות אפשרית רק במרחק של 1.5 מ"מ ומעלה מנקודת המגע וזאת בשל גרדיאנט מעוות חד במרחק קטן יותר, אולם אז משוואות מאמצי המגע של Hertz יאבדו מתקפותם עבור כוח מגע הקטן מ 50N מאחר ורוחב המגע יהיה קטן יחסית למרחק המדיד. לבסוף הוחלט להדביק את המדיד ב  $z=1.5$  mm ולהיעזר בנתונים מהניסויים הפוטואלסטיים עבור כוחות מגע הקטנים מ 50N.

### 2.3.2.2 בחירת גודל המדיד

גודל מדיד המעוות צריך להיות כזה שהסטייה  $(\varepsilon_c - \varepsilon_{av})/\varepsilon_c$  בין ערך המעוות הממוצע תחת השטח שהוא מכסה לערך המעוות במרכזו תהיה זניחה. לצורך החישוב חולק שטח המדיד למערך של  $13 \times 13$  וערך המעוות חושב (בעזרת משוואות המגע) ב 169 הנקודות המרכיבות אותו, הערך הממוצע של המעוות בנקודות אלו השווה עם המעוות בנקודת מרכז המדידה ( $x=0; z=1.5$  mm). איור 2.14 מציג את הסטייה כתלות בגודל המדיד.



איור 2.14 : שגיאת קריאה בתלות בגודל המדיד

כצפוי הסטייה במדידה קטנה ככל שהמדיד קטן יותר. בשוק קיימים מדידים מתוצרת Vishay Measurements Group בשני גדלים שיכולים להתאים: בגודל של  $0.4 \times 0.4$  מ"מ עם התנגדות של  $120 \Omega$  ובגודל של  $0.79 \times 0.81$  מ"מ עם התנגדות של  $350 \Omega$ . למרות שהמדיד הקטן יותר מדויק יותר הוחלט להשתמש במדיד הגדול יותר וזאת בגלל התנגדותו הגבוהה יותר, דבר החשוב למניעת התחממותו כפי שיוסבר בהמשך.



## 2.3.2.3 פינוי חום מהמדיד

ההספק שמפתח נגד נתון ע"י הקשר:

$$P = \frac{V^2}{R} \quad (2.32)$$

כאשר  $V$  – המתח על הנגד ו  $R$  ההתנגדות, לכן ההספק שיפתח נגד עם ערך התנגדות גבוה יותר יהיה נמוך יותר והוא יתחמם פחות.

הגורם השני שמשפיע על ההספק הוא המתח על המדיד, שנקבע למעשה ע"י מתח הכניסה לגשר  $V_i$ . ככל שנעלה את מתח הכניסה נקבל אות חזק יותר ביציאה  $V_o$ . אומנם ניתן להגביר את  $V_o$  בעזרת המגבר, אולם דבר זה יגביר גם את הרעשים לכן יש צורך למצוא את הערך המקסימאלי של  $V_i$  שבו קצב פינוי החום ליחידת שטח  $P_D$  מהמדיד דרך הדיסקה הפלסטית יהיה גדול או שווה לקצב הספקת החום מהמעגל החשמלי (Dally & Riley (1978):

$$P_D \geq \frac{P}{A} \quad (2.33)$$

הפרמטר  $P_D$  מבטא למעשה את שטף החום דרך שטח המדיד  $A$  ותלוי בחומר ממנו עשוי הדגם

$$P_D = 0.0007 \frac{W}{mm^2} \text{ עבור חומרים פלסטיים}$$

כעת נוכל להעריך את מתח הכניסה לגשר עפ"י:

$$V_{in} = \sqrt{4AP_D R} = \sqrt{4 \cdot 0.8^2 \cdot 0.0007 \cdot 350} = 0.8 \text{ V} \quad (2.34)$$

לאחר התייעצות עם נציג חברת Vishay בארץ הוחלט על מתח כניסה למעגל של 1V.

**2.3.2.4 זמן תגובת המדיד**

זמן תגובת המדיד נקבע למעשה ע"י שני גורמים:

1. הזמן שלוקח לגל המאמץ לעבור את שכבת הדבק ולהגיע למדיד.

2. הזמן שלוקח לגל המאמץ לעבור את אורך המדיד.

מחקרים הראו שהזמן שלוקח לגל המאמץ לעבור את שכבת הדבק ולהגיע למדיד הוא כ  $0.1 \mu\text{sec}$

(Dally & Riley (1978). לכן זמן התגובה המקסימאלי של המדיד יהיה

$$t_{r, \max} = \frac{l_0}{C} + 0.1 \times 10^{-6} = \frac{0.8 \times 10^{-3}}{400} + 0.1 \times 10^{-6} = 2.1 \mu\text{sec} \quad (2.35)$$

כאשר:  $l_0$  - אורך המדיד,  $C$  - מהירות הגל המינימאלית הצפויה בניסוי.

**2.3.2.5 מסקנות**

לאור השיקולים שהוסברו בסעיפים הקודמים הוחלט שהמדיד המתאים ביותר לתנאי הניסוי הוא

EA-06-031EC-350 מתוצרת Vishay-Measurements Group במידות  $0.79$  מ"מ  $\times$   $0.81$  מ"מ

והתנגדות של  $350 \Omega$ .

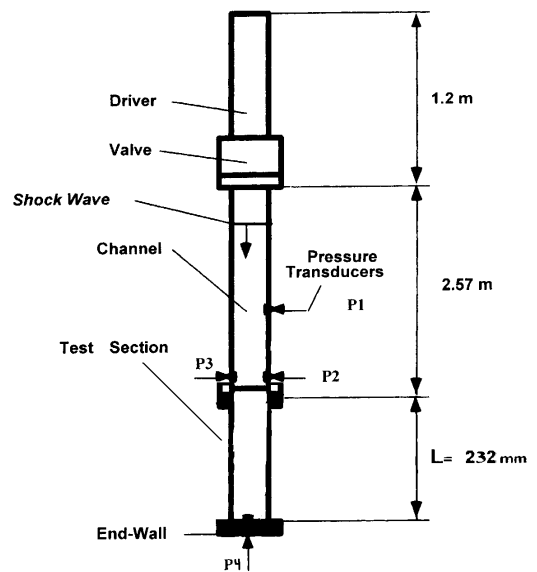
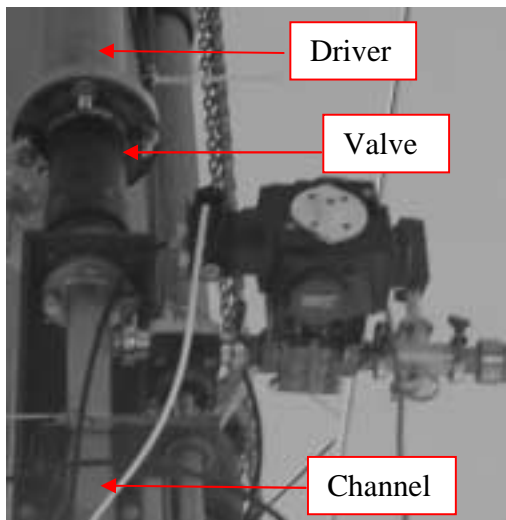
## 3 מערכת הניסוי

מערכת הניסוי מורכבת מארבעה חלקים עיקריים:

1. נקבת ההלם (Shock Tube) - מייצרת את הגל ההלם שפוגע בתא הניסוי.
2. תא הניסוי עם הדיסקות הפוטואלסטיות.
3. מערכת אופטית - מאפשרת צילום של תא הניסוי ושדה המאמצים הפוטואלסטי בזמנים דיסקרטיים שונים.
4. מערכת של מדידי מעוות - מודדת את המעוות במספר אזורי מגע בין הדיסקות.

### 3.1 נקבת ההלם

כל הניסויים נעשו בנקבת הלם אנכית העשויה מפלדת אל חלד בעלת חתך ריבועי במידות 31 מ"מ × 31 מ"מ, הגז שמילא את כל חלקי הנקבה היה אוויר. נקבת ההלם מורכבת משני חלקים עיקריים: אזור לחץ גבוה (Driver) ואזור לחץ נמוך (Channel) שמתחתיו ממוקם תא הניסוי (Test Section), המידות מופיעות באיור 3.1. בין שני החלקים מורכב ברז פניאומאטי מהיר מתוצרת ISTA, Russia בעל זמן תגובה של 1 msec אשר עם פתיחתו מתחיל להתקדם גל ההלם בנקבה מאזור הלחץ הגבוה כלפי מטה אל עבר תא הניסוי שם הוא פוגע בדופן תא הניסוי ומוחזר כלפי מעלה. שימוש בברז המהיר במקום בדיאפרגמה מבטיח הדירות גבוהה של הניסויים. ע"י כיוון יחס הלחצים בין ה Driver וה Channel ניתן לשלוט על מהירותו של גל ההלם (מס', מאך), דהיינו על עוצמתו. לאורך הנקבה ישנם שני מתמרי לחץ P1 ו P2 מתוצרת חברת Kistler דגם 603B1 המודדים את עוצמת גל ההלם ע"י המרת מעוותים בגביש למתח חשמלי והגברת האות במגבר מטען Kiag Swiss מודל 5001. ע"י מדידת הזמן שלוקח לגל ההלם לעבור את המרחק מ P1 ל P2 ניתן לחשב את מהירות גל ההלם. מד לחץ שלישי P3 משמש כאינדיקאטור להגעת גל ההלם לפתח תא הניסוי.



איור 3.2 : ברז פניאומאטי מהיר

איור 3.1 : סכימת נקבת ההלם



איור 3.4 : מגבר מטען למתמר הלחץ

איור 3.3 : מתמר לחץ

רגישות:	.35 pc/psi
ליניאריות	±1%
טווח לחצים:	.0-250 bar
טווח טמפרטורה:	עד 350°C
זמן תגובה:	1 μsec
אלמנט חישה:	קוורץ

טבלה 3.1 : נתוני מתמר הלחץ

### 3.1.1 בדיקת הדירות גל ההלם

לפני ביצוע הניסויים בנקבה נעשו מספר ניסויים מקדימים בתנאים זהים על מנת לבדוק את ההדירות: הלחצים בנקבה כוונו ל  $P_{Channel} = 1 \text{ bar}$  ו  $P_{Driver} = 4 \text{ bar}$ . בתנאים אלו נוצר גל הלם שמהירותו היא  $V_{SW} = 465 \frac{m}{sec}$  ומאחריו קפיצת מדרגה בלחץ לערך של  $P_{SW} = 1.96 \text{ bar}$ . כאשר גל ההלם מוחזר מתא הניסוי הממוקם בדופן התחתונה של ה Channel עוצמתו עולה ל  $P_{reflected} = 3.75 \text{ bar}$ . תוצאות אלו חזרו על עצמן והראו שיש הדירות גבוהה של גל ההלם הפוגע בתא הניסוי, כמו כן יש התאמה טובה לערכים שחושבו עפ"י התיאוריה.

### 3.2 הדיסקות הפוטואלסטיות

דיסקות בקוטר 20 מ"מ הוכנו מפלטות של חומר פוטואלסטי PSM-9 מתוצרת חברת Vishay בעזרת עיבוד שבבי. תשומת לב מרבית ניתנה בעת העיבוד לפינוי החום ולדפינה עדינה של החומר כדי לא להכניס מאמצים שיוריים בחומר. מידות הפלטה הם 254 x 254 מ"מ x 9.5 מ"מ, כלומר עובי הדיסקות הוא 9.5 מ"מ. נתוני החומר עפ"י היצרן מובאים בטבלה 3.1.

Stress Optic Coef.- $f_{\sigma}$ $N/[m \cdot fringe]$	Elastic Modulus - E [GPa]	Tensile Strength [MPa]	Poisson Modulus - $\nu$
10500	3.3	50	0.36

טבלה 3.2 : נתוני היצרן עבור PSM-9

לאחר ייצור הדיסקות נבדקו תכונותיהן: בוצע ניסוי כיוול על מנת למצוא את המקדם האופטי  $f_{\sigma}$  (נספח 2) והנתונים המכאניים של החומר חושבו עפ"י ערכי מהירויות הקול האורכית והרוחבית בחומר שנמצאו בניסוי נוסף (נספח 1).



איור 3.5 : PSM 9 - החומר הפוטואלסטי ממנו יוצרו הדיסקות

### 3.3 תא הניסוי

תא הניסוי העשוי מחומר פלסטי שקוף (Plexiglas) מוקם בחלק התחתון של נקבת ההלם כמוראה באיור 3.6. במרכזו עובר פתח מלבני שמידותיו 20.2 מ"מ x 10 מ"מ אליו הוכנסו 11 דיסקות מחומר פוטואלסטי PSM 9 (מתוצרת Vishay, U.S.A) בקוטר של 20 מ"מ ורוחב של 9.5 מ"מ כמוראה באיור 3.6a. חתיכה בעלת חתך מלבני מאותו חומר באורך של 7 מ"מ מוקמה על גבי הדיסקה העליונה על מנת למנוע פגיעה של גל ההלם המגיע מן הנקבה בהיקף הדיסקה העליונה ויצירת החזרות של הגל מכיוונים שונים בדיסקה. חתיכה זו כוסתה ביריעת גומי דקה על מנת למנוע חדירת אוויר מנקבת ההלם לתא הניסוי. בחלק התחתון מוקמה חתיכה מלבנית נוספת בגובה של 4 מ"מ, כל השרשרת יושבה על פלטת אלומיניום. ניתן ליצור שרשרת ארוכה יותר ע"י צימוד של שני תאים (איור 3.6b) ושרשרת קצרה יותר ע"י הכנסת מוט מתכת בתחתית התא (איור 3.6c).



(c)



(b)



(a)

איור 3.6 : תא הניסוי - (a) שרשרת של 11 דיסקות, (b) שרשרת של 22 דיסקות, (c) שרשרת של 3 דיסקות.

### 3.4 ניסויים פוטואלסטיים-המערכת האופטית

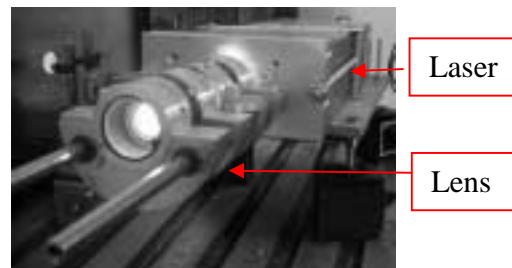
#### 3.4.1 רכיבי המערכת האופטית

##### 3.4.1.1 מערכת הלייזר (Q-switch YAG Laser)

לייזר מתוצרת Wave Electronics, USA מדגם M210G בעל אורך גל של  $532\text{ nm}$  היווה מקור אור מונוכרומטי עבור הניסויים הפוטואלסטיים. הלייזר מסוגל לייצר אלומת אור רציפה או הבזק של אור הנמשך  $15\text{ nsec}$ . ניתן לכוון את הלייזר שייצר את אלומת האור רק לאחר קבלת אות חיצוני (Trigger), תכונה זו מאפשרת לצלם את שדה המאמצים הפוטואלסטי בתנאים של העמסה סטאטית (חשוב הן לכיול של המערכת והן למציאת הקבוע הפוטואלסטי) ובזמנים דיסקרטיים בעת העמסה דינאמית. מאחר והלייזר מייצר אלומת אור צרה יש צורך להשתמש בעדשה גלילית שתפזר את האור על פני תא הניסוי, שלוש עדשות נוספות ולוח מחומר שקוף למחצה (Diffuser) מאפשרים לכוון את פיזור האור בעוצמה אחידה.



איור 3.8 : בקרת הלייזר



איור 3.7 : מכשיר הלייזר

##### 3.4.1.2 פולאריסקופ מישורי/מעגלי

הפולאריסקופ מתוצרת חברת Vishay מורכב משני לוחות מקטבים המאפשרים מעבר אור דרכם בכיוון מישור אחד בלבד, הלוח המקטב הראשון נקרא Polarizer והשני Analyzer ובניהם נמצא תא הניסוי. צמוד לכל לוח ישנה פלטת רבע גל ששילובם הופך את הפולאריסקופ למעגלי ומונע הופעת קווי האיזוקלינות המראות את כיוון המאמצים הראשיים.



איור 3.9 : הפולאריסקופ

### 3.4.1.3 מערכת הצילום

מצלמת CCD (Sony, XC 75, Japan) ממוקמת לאחר הלוח המקטב השני (Analyzer) ממוקדת על הדיסקות אותן נרצה לצלם. המצלמה מחוברת למחשב באמצעות כרטיס Meteor 2- Frame Grabber MC/4, מתוצרת Matrox, USA. בעזרת תוכנה תואמת (Intelicam 6.1, Matrox, USA) ניתן להפעיל את המצלמה כך שתתקבל תמונת וידאו רציפה על מסך המחשב (אין אפשרות לשמור בזיכרון את סרט הוידאו, אלא רק לצפות בו) או לצלם תמונה בודדת. ניתן לכוון את ה Frame Grabber כך שיפעיל את המצלמה רק לאחר קבלת אות חשמלי (Trigger) ממקור חיצוני. אפשרויות הפעלה אלו מאפשרות קבלת תמונת שדה המאמצים הפוטואלסטי הן בתנאי העמסה סטאטיים והן בתנאי העמסה דינאמיים בזמן דיסקרטי ישירות על המחשב. שיטה זו בניגוד לשימוש במצלמה מהירה אנאלוגית חוסכת את הצורך בפיתוח תשליל והעברת התמונה למחשב, כמו כן יש אפשרויות רבות יותר לביצוע כיוול וכיוון של התמונה. החיסרון בשיטה זו הוא שניתן בכל ניסוי לצלם תמונה אחת בלבד של שדה המאמצים הפוטואלסטי, ועל מנת לקבל רצף של תמונות יש לחזור שוב פעם על הניסוי-דבר הדורש הדירות גבוהה של תנאי הניסוי. כאמור, שימוש בנקבת הלם עם ברז פניאומאטי מהיר אכן מבטיח הדירות גבוהה.

### 3.4.2 מערכת ניסוי פוטואלסטי

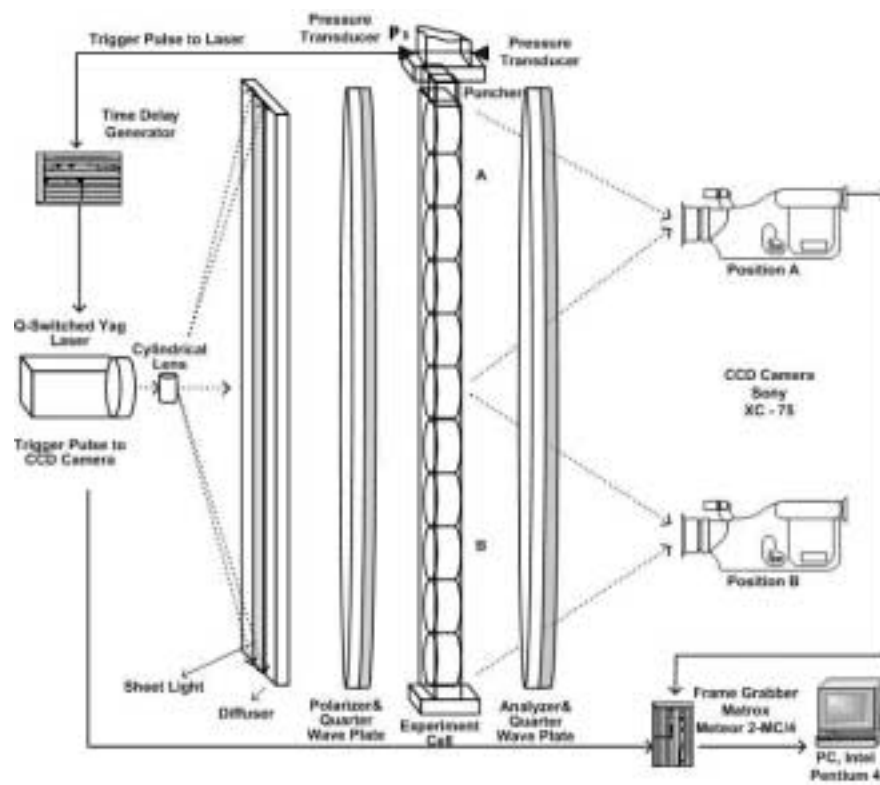
תרשים המערכת מופיע באיור 3.11.

גל ההלם מתקדם בנקבת ההלם אל עבר תא הניסוי. מתמר לחץ הפרשי  $P_3$  מתוצרת חברת Kistler הממוקם במרחק של 10 מ"מ מעל לתא הניסוי חש בגל ההלם שמגיע אליו ומוציא אות מתח חשמלי המשמש כ Trigger להפעלת מכשיר ההיית האותות (Time Delay Generator, Bnc, England). את זמן ההשהיה ניתן לכוון לערכים דיסקרטיים שונים על מנת לקבל את תמונת שדה המאמצים בזמנים אלו (יחסית לזמן הגעת גל ההלם למתמר הלחץ  $P_3$ ). לאחר זמן ההשהיה יוצא אות חשמלי אל ה Frame Grabber שמפעיל את מצלמת ה CCD. מאחר וזמן התגובה של המצלמה ארוך משל הלייזר יוצא אות חשמלי נוסף שמפעיל את מכשיר הלייזר רק כעבור השהיה נוספת של  $1 \mu sec$ . האור היוצא מן הלייזר עובר דרך העדשות וה Diffuser המגדילים את אלומת האור למידת תא הניסוי. לאחר מכן האור עובר דרך פלטת רבע גל, מקוטב ב Polarizer ונשבר בדיסקות הפוטואלסטיות בכיוון המאמצים הראשיים. במעבר דרך פלטת רבע הגל השנייה וה Analyzer מתקבלת תמונת שדה המאמצים בדיסקות המורכבת מפסים לבנים ושחורים שלאורך כל אחד מהם הערך של מאמץ הגזירה המקסימאלי קבוע, תמונה זו מועברת באמצעות המצלמה למחשב.





איור 3.10 Time Delay Generator



איור 3.11 : סכימת הניסויים הפרוטואלסטיים

### 3.5 ניסויים עם מדידי מעוות

#### 3.5.1 מדיד המעוות

מדידי מעוות מתוצרת חברת Vishay – Measurement Group מדגם EA-06-031EC-350 הודבקו לארבע דיסקות במרחק 1.5 מ"מ מנקודת המגע בעזרת דבק מסוג M-Bond 200. המדידים חוברו בחיבור רבע גשר למגבר.

0.79 מ"מ	אורך המדיד
1.07 מ"מ	אורך כללי
0.81 מ"מ	רוחב הגריד
3.56 מ"מ	רוחב כללי
$350 \pm 0.2\%$ אוהם	התנגדות
1%	רגישות למעוות ניצב
2.06	פקטור המדיד (Gauge Factor)



איור 3.12 : מדיד המעוות

טבלה 3.3 : נתוני מדיד המעוות

#### 3.5.2 מגבר למדיד המעוות

בניסוי נעשה שימוש במגבר מדגם 2311 של חברת Vishay עם גשר ויטסטון פנימי עם אפשרות לחבור רבע גשר, חצי גשר וגשר מלא. אות המוצא שלו הוא מתח אי האיזון בגשר לאחר הגברה. למגבר כיוול פנימי פשוט (Shunt Calibration) המכויל ל פקטור מדיד  $G.F.=2$  המתאים את המתח במוצא למעוות (לדוגמא :  $0.5V = 1000 \mu strain$ ).



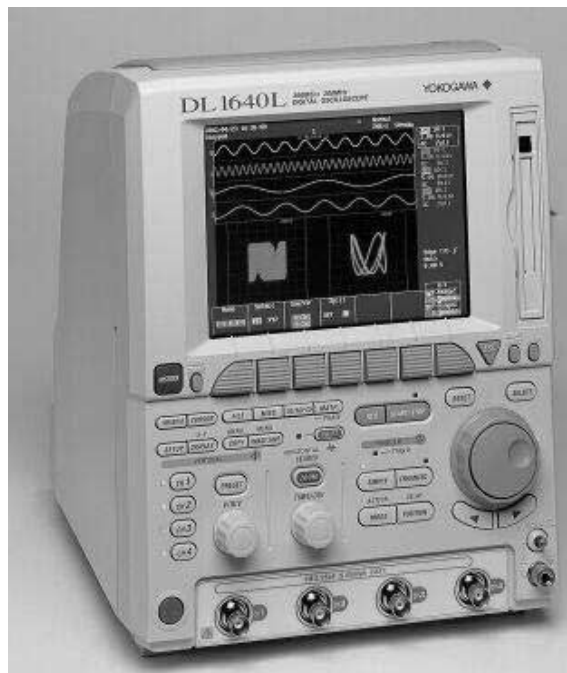
איור 3.13 : מגבר Vishay 2311 למדידי מעוות

X 1-X 11000	הגבר ניתן לכוונון
0.7 – 15 Vdc	מתח כניסה לגשר
10 ÷ 10000 Hz	ארבעה מסנני רעשים
125 kHz	תגובת תדר

טבלה 3.4 נתוני מגבר 2311

### 3.5.3 איסוף הנתונים

איסוף הנתונים, כלומר קבלה ושמירת הקריאות החשמליות שהתקבלו ממדידי המעוות ומתמרי הלחץ נעשה ע"י אוסצילוסקופ דיגיטאלי מתוצרת חברת Yokogawa, Japan דגם DL1640 בקצב דגימה של 2MHz. הנתונים הועברו לאחר מכן למחשב PC ועובדו בעזרת תוכנת MATLAB.



איור 3.14 : אוסצילוסקופ דיגיטאלי

## 4 תוצאות ודין

בפרק זה מוצג מהלך הניסוי ותוצאות הניסויים שנעשו.

### 4.1 מהלך הניסוי

תא הניסויים שבו נעשה שימוש בניסויים הכיל בתוכו 11 דיסקות בקוטר 20 מ"מ, חתיכה מלבנית (Puncher) באורך 7 מ"מ שהונחה מעליהן וחתיכה מלבנית באורך 4 מ"מ שהונחה מתחתיהן. נעשו שני סדרות ניסויים:

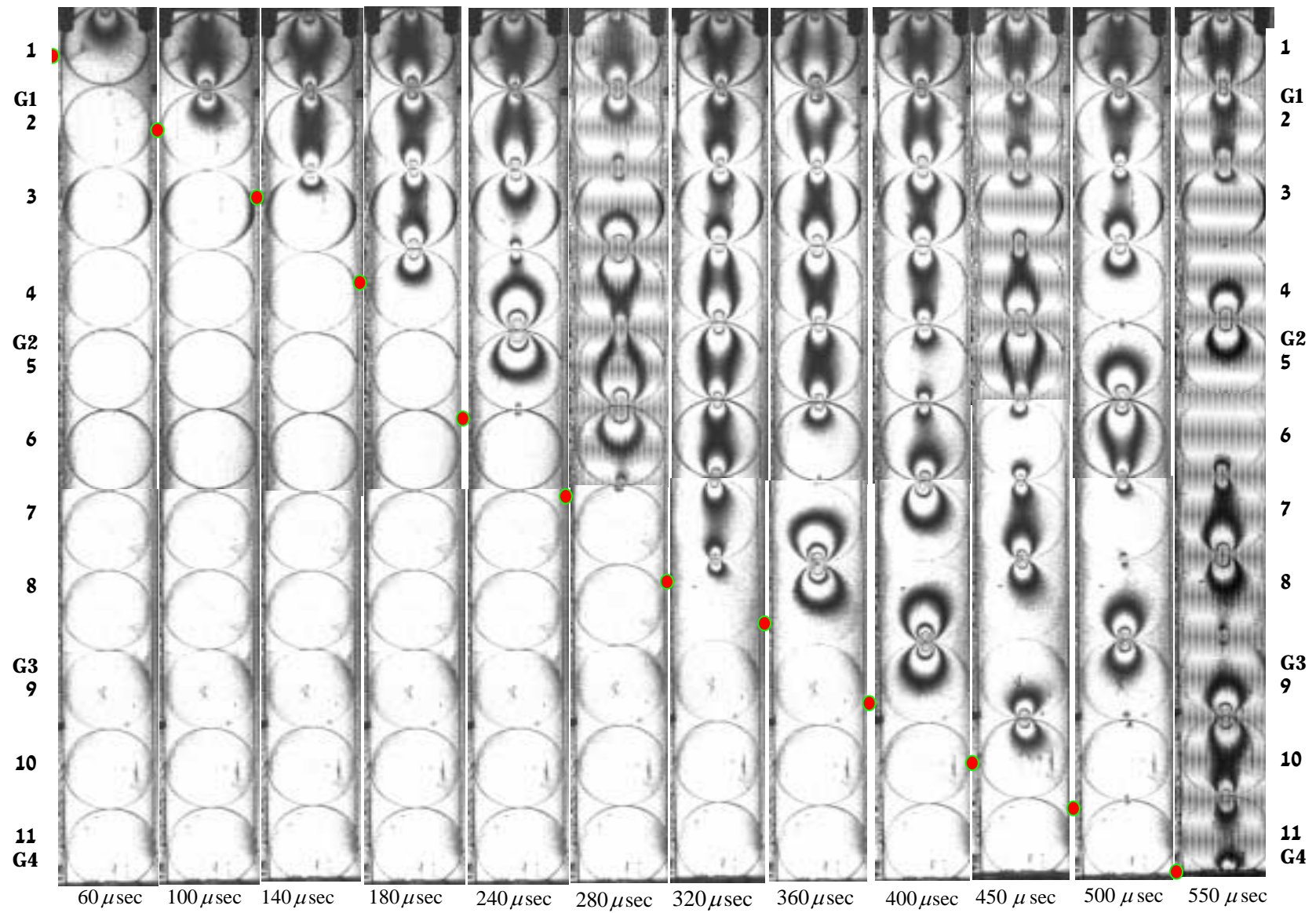
1. צילום שדה המאמצים הפוטואלסטי בשרשרת בזמנים דיסקרטיים שונים בשדה לבן. כדי לקבל רזולוציה טובה יותר שתאפשר הוצאת נתונים מהתמונות לחישוב כוח המגע הצילום חולק לשניים: תחילה צולם החצי העליון של התא (דיסקות 1 עד 6) ובהמשך החלק התחתון (דיסקות 6 עד 11), הדיסקה האמצעית (השישית) צולמה בשני המקרים כדי לוודא שאכן יש התאמה בניהם.
2. מדידת היסטורית המעוותים בנקודה המרוחקת 1.5 מ"מ מתחת לנקודת המגע בעזרת מדידי מעוות שהודבקו על גבי ארבע דיסקות באזורי המגע הבאים: בין דיסקות 1 ו 2, 4 ו 5, 8 ו 9, 11 והתחתית (הספירה מתחילה מלמעלה), המדידים סומנו כ  $G_4, G_3, G_2, G_1$  בהתאמה.

בהמשך, כדי לבדוק האם התופעות שנצפו בניסויים מופיעות גם באורכים שונים של שרשרת דיסקות נעשו ניסויים נוספים בעזרת מדידי מעוות בשרשרות של 22 דיסקות ושלוש דיסקות. בכל הניסויים גל ההלם המוחזר שהעמיס את השרשרת היה מסוג מדרגה שנמשך כ 6 msec בעוצמה של 3.75 bar לכן הכוח שהופעל על ה Puncher יהיה  $F = P \cdot A = 73.5 N$ .

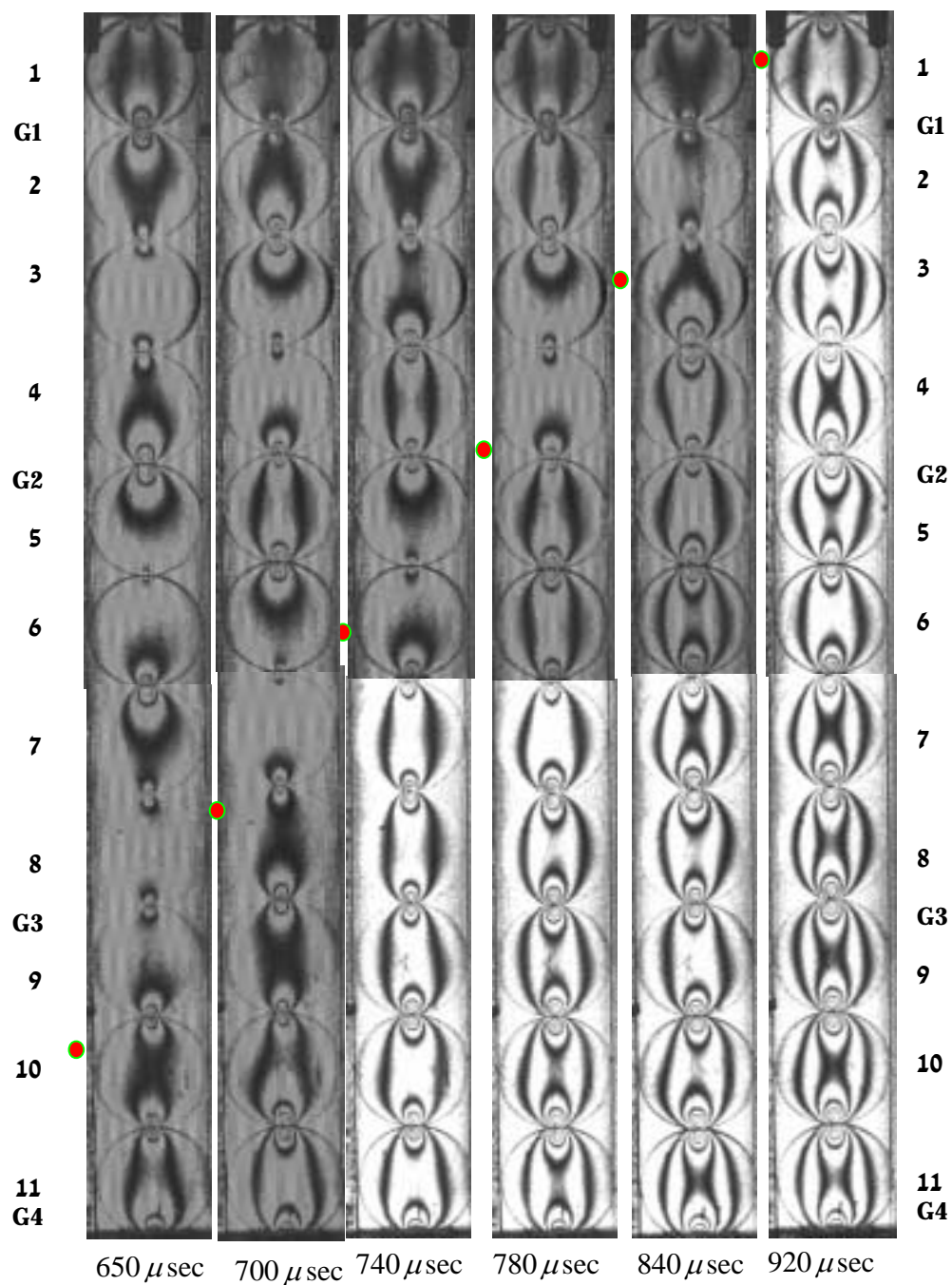
## 4.2 שרשרת של 11 דיסקות

### 4.2.1 אופן התקדמות הגל

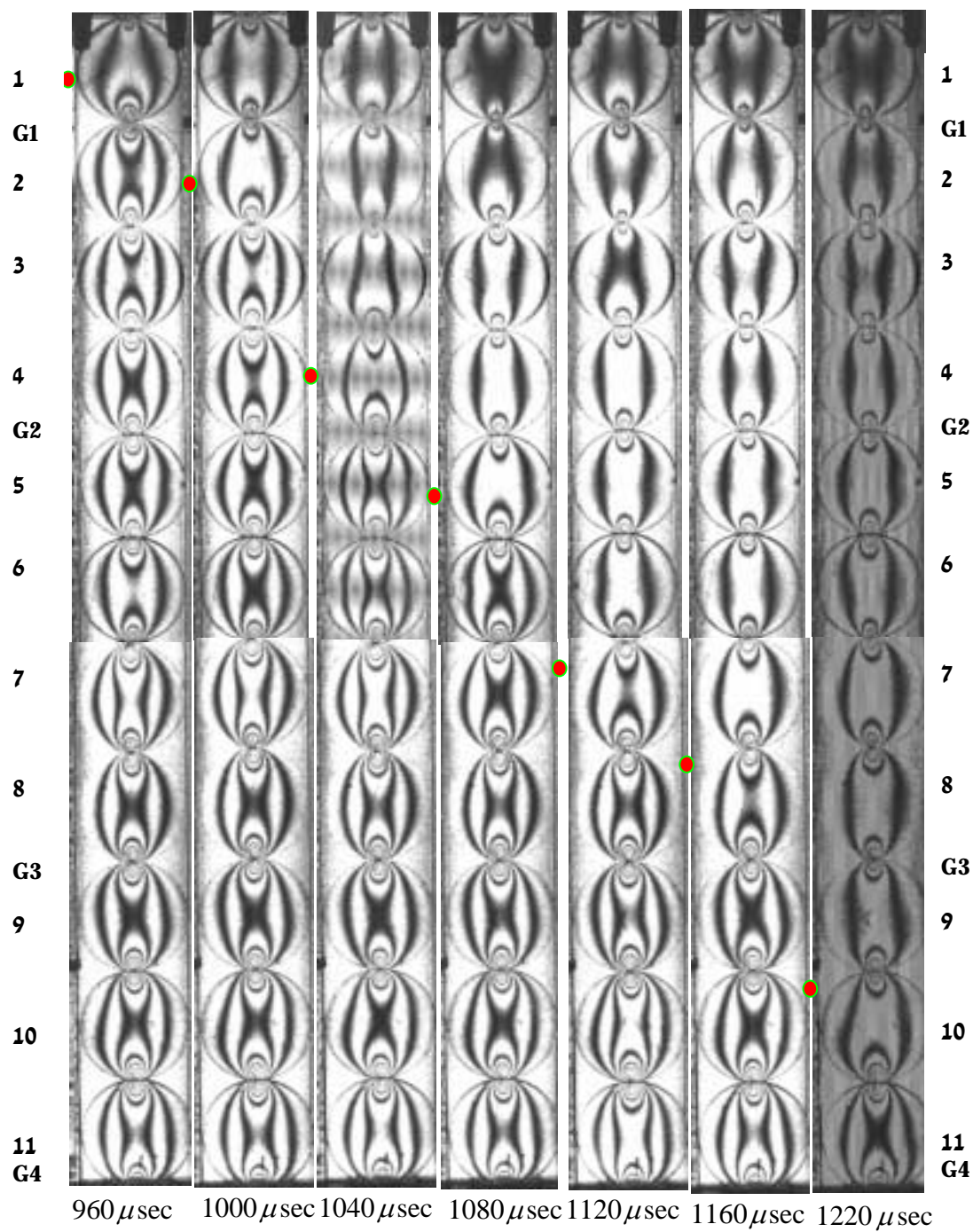
גל ההלם שפוגע בשרשרת גורם לגל מאמץ המתקדם בתווך (TSW-Transmitted Stress Wave) ומגיע לדיסקה הראשונה בזמן של  $40 \mu\text{sec}$ . עם התקדמותו מעלה הגל את המאמץ מאחוריו, דבר המתבטא ביצירת איזוכרוטות כמוראה באיור 4.1, הנקודות מציינות את חזית הגל. הגל מתקדם עד לגבול התחתון של תא הניסוי שם הוא פוגש אלומיניום בעל אימפדנס אקוסטי הגדול משל החומר הפוטואלסטי, PSM 9, ממנו עשויות הדיסקות. לכן הוא מוחזר אל השרשרת (RSW-Reflected Stress Wave) כמוראה באיור 4.2. עם החזרה לחלק העליון של תא הניסוי הגל פוגש את הלחץ בנקבה הנמוך מזה שבשרשרת ולכן מוחזר לשרשרת גל ריווח (TEW-Transmitted Expansion Wave) המוריד את המאמץ לערך שהיה לפני ה RSW (איור 4.3). הגל מתקדם עד לחלק התחתון של תא הניסוי ממנו הוא מוחזר כגל ריווח (REW-Reflected Expansion Wave) המוריד את המאמץ מאחוריו כמעט לאפס (איור 4.4). עם הגעתו לחלק העליון נוצר מצב הדומה להתחלה, כלומר מאמץ נמוך מאוד בשרשרת ואות מדרגה בעוצמה של 3.75 bar הגורם לגל מאמצים המתחיל להתקדם שוב בשרשרת. היסטורית המעוותים בנקודת המגע בין הדיסקה התחתונה (מס. 11) ל Puncher התחתון, כפי שמופיעה באיור 4.5 מראה שהתהליך חוזר על עצמו מספר פעמים בעוצמות נמוכות יותר בכל פעם עד להתייצבות על הערך של גל המדרגה בנקבה.



TSW-Transmitted Stress Wave : איור 4.1

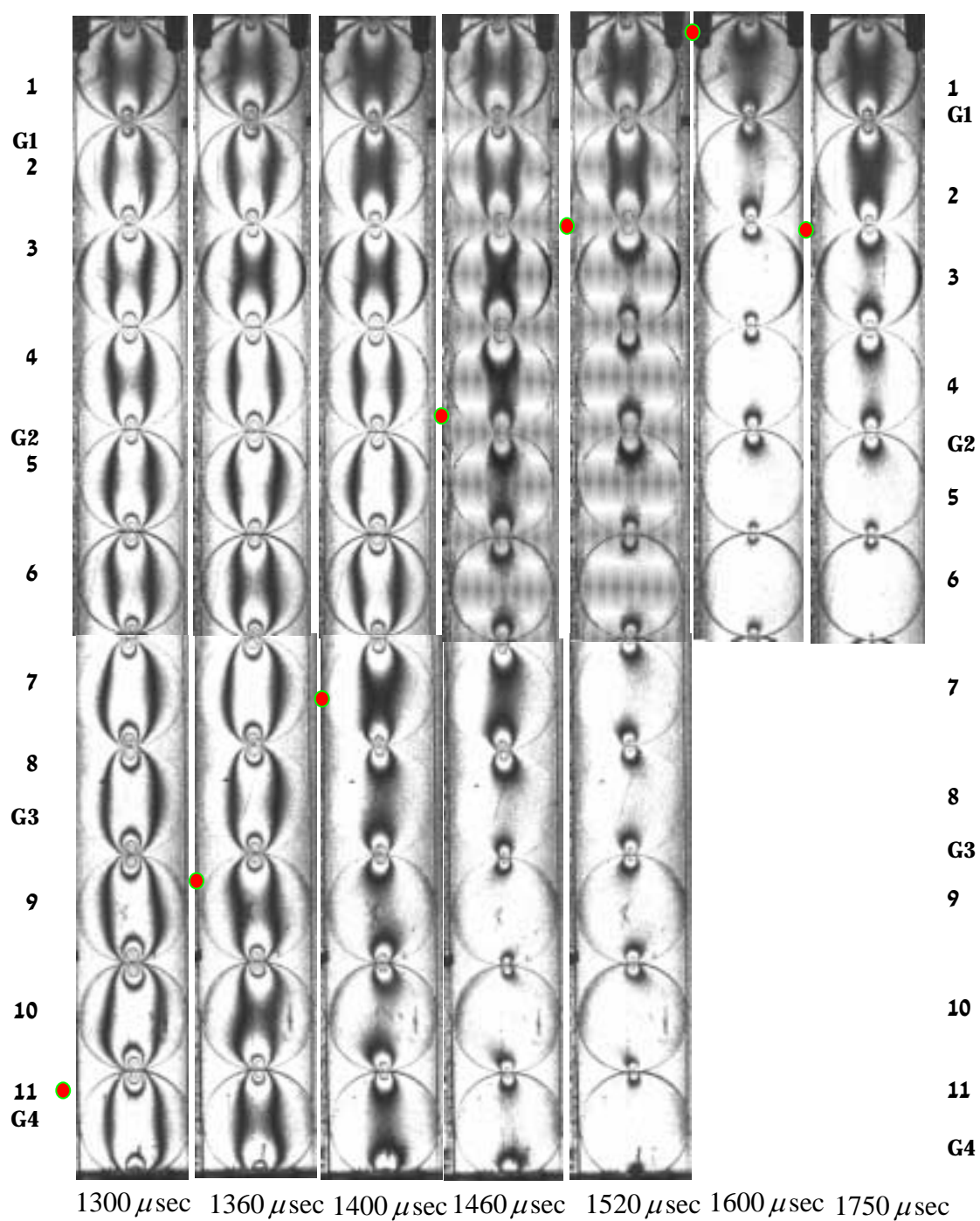


RSW-Reflected Stress Wave : איור 4.2

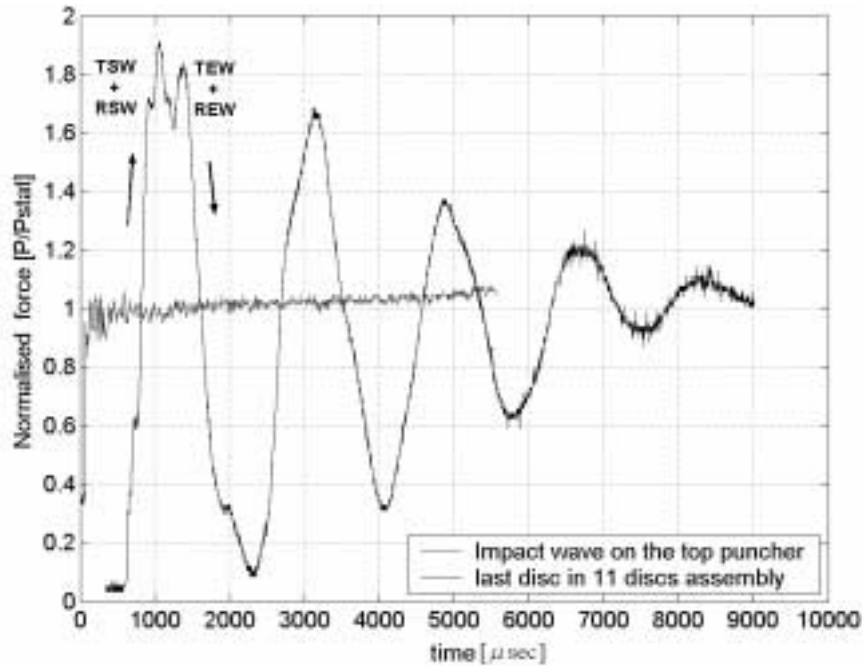


אירור 4.3 : TEW-Transmitted Expansion Wave





REW-Reflected Expansion Wave : איור 4.4



איור 4.5 : מעוות מנורמל בנקודת המגע התחתונה

#### 4.2.2 מהירות הגל

עפ"י הנתונים שהתקבלו מהניסויים הפוטואלסטיים וממדידי המעוות ניתן להעריך את הזמן שבו הגל הגיע לנקודות המגע השונות בין הדיסקות, מאחר והמרחק בין הנקודות ידוע ניתן לחשב את מהירות התקדמות הגל. טבלאות 4.1 – 4.4 מראות את מהירות הגל בכל כיוון ואיור 4.6 מראה את מיקום חזית הגל בתלות בזמן. מהנתונים ניתן להסיק כי:

1. המהירות הממוצעת של גל המאמצים TSW המתקדם בשרשרת משוחררת (ללא העמסה התחלתית) של דיסקות היא 431 מ/ש, ערך זה נמוך בצורה משמעותית מ 2620 מ/ש שהיא מהירות הקול בחומר. הזמן הממוצע שבו הגל עובר דיסקה אחת הוא  $46 \mu\text{sec}$ .
2. המהירות הממוצעת של גל המאמצים המוחזר RSW היא 698 מ/ש, מהירות זו גבוהה יותר מזו של ה TSW, וזאת מפני שהוא מתקדם בשרשרת דחוסה, עם מגע טוב יותר בין הדיסקות. הזמן הממוצע שבו הגל עובר דיסקה אחת הוא  $29 \mu\text{sec}$ .
3. המהירות הממוצעת של גל הריווח TEW היא 710 מ/ש ושל גל הריווח המוחזר REW היא 667 מ/ש, מהירויות אלה דומות לזו של ה RSW. הזמן הממוצע שבו הגל עובר דיסקה אחת הוא  $30 \mu\text{sec}$ .
4. חלוקה של השרשרת למקטעים לא מצביעה על התנהגות שחוזרת על עצמה מלבד מהירות גל הריווח המוחזר, REW, שדועכת בתוך השרשרת.

Average Velocity in discs no.	Average Velocity [m/sec]	Arrival Time [ $\mu$ sec]	Contact between discs no.
1-4	457	40	0-1
5-8	516	70	1-2
9-11	333	215	4-5
1-11	431	370	8-9
		550	11-Puncher

טבלה 4.1 : מהירות גל המאמצים המועבר, TSW

Average Velocity in discs no.	Average Velocity [m/sec]	Arrival Time [ $\mu$ sec]	Contact between discs no.
9-11	630	585	11-Puncher
5-8	800	680	8-9
1-4	667	780	4-5
11-1	698	870	1-2
		900	0-1

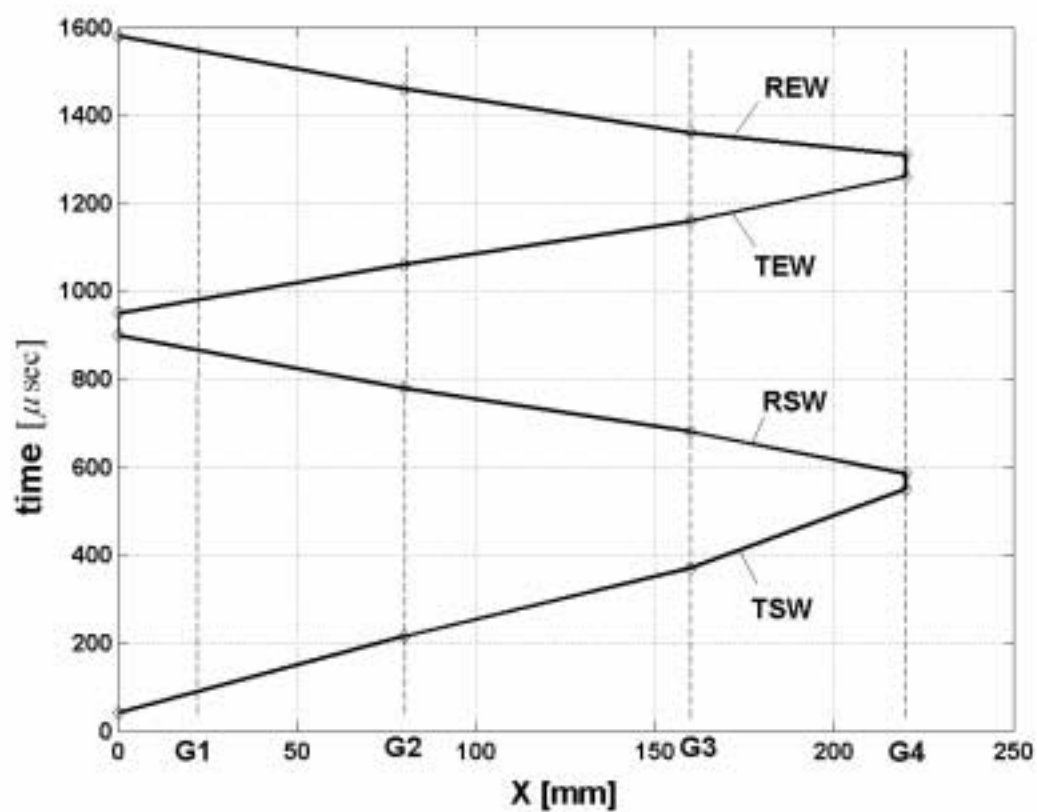
טבלה 4.2 : מהירות גל המאמצים המוחזר, RSW

Average Velocity in discs no.	Average Velocity [m/sec]	Arrival Time [ $\mu$ sec]	Contact between discs no.
1-4	730	950	0-1
5-8	600	990	1-2
9-11	800	1060	4-5
1-11	710	1160	8-9
		1260	11-Puncher

טבלה 4.3 : מהירות גל הריוח המועבר, TEW

Average Velocity in discs no.	Average Velocity [m/sec]	Arrival Time [ $\mu\text{sec}$ ]	Contact between discs no.
9-11	857	1290	11-Puncher
5-8	800	1360	8-9
1-4	750	1460	4-5
11-1	667	1540	1-2
		1580	0-1

טבלה 4.4: מהירות גל הריוח המוחזר, REW



איור 4.6: דיאגרמת x-t

### 4.2.3 צורת הגל

הניסויים עם מדידי מעוות הראו שיש תלות חזקה בין אמפליטודת המעוות לבין האוריינטציה של הדיסקה, כלומר על מדיד המעוות להיות ממוקם בדיוק מתחת לשטח המגע, ושאיכות שטח המגע בין כל הדיסקות תהיה זהה, דבר שקשה לעשותו מבחינה מעשית. כדי לפתור את הבעיה ולהשוות בין התוצאות שהתקבלו ממדידי המעוות השונים ובינם לתוצאות שהתקבלו מתמונות שדה המאמצים הפוטואלסטי הוחלט לנרמל את הקריאות יחסית לערכים בזמן שיווי משקל, כלומר כאשר הגל המתקדם בחומר דועך והקריאה מתייצבת על ערך קבוע. עבור כל ניסוי עם מדיד מעוות נמדדה הקריאה בשיווי משקל וערכי היסטורית המעוותים חולקו בערך זה. עפ"י התמונות של שדה המאמצים הפוטואלסטי חושב הערך של כוח המגע בנקודות המגע בהן הודבקו מדידי המעוות עפ"י הסכימה הנומריית שהוצעה ע"י Shukla & Nigham (1985), ערכים אלו נורמלו יחסית לכוח שמפעיל גל ההלם בנקבה על ה-Puncher, כלומר  $73.5 \text{ N}$ . בצורה זו התקבלו מהניסויים הפוטואלסטיים נתונים שאפשרו לראות את היסטורית כוח המגע בנקודות המגע השונות וממדידי המעוות את היסטורית המעוותים בנקודה המרוחקת  $1.5 \text{ מ"מ}$  אנכית לאזור המגע, כמוראה באיורים 4.7 – 4.12. באיורים אלו משמעות הסימונים הם: A - הגעת גל המאמץ TSW, B - הגעת גל המאמץ המוחזר RSW, C - הגעת גל הריווח TEW, D - הגעת גל הריווח המוחזר REW.

ניתן להבחין שההתנהגות התנודתית בגרפים המבוססים על הנתונים הפוטואלסטיים חדה יותר מזו שבגרפים המבוססים על מדידי המעוות, הסיבה לכך שהקריאה ממדיד המעוות רגישה פחות, היא זמן התגובה הארוך יחסית של המגבר –  $8 \mu\text{sec}$ .

מהתבוננות בגרפים 4.7 ו 4.8 המתארים את נקודת המגע בין דיסקות 1 ו 2 ניתן לראות כי:

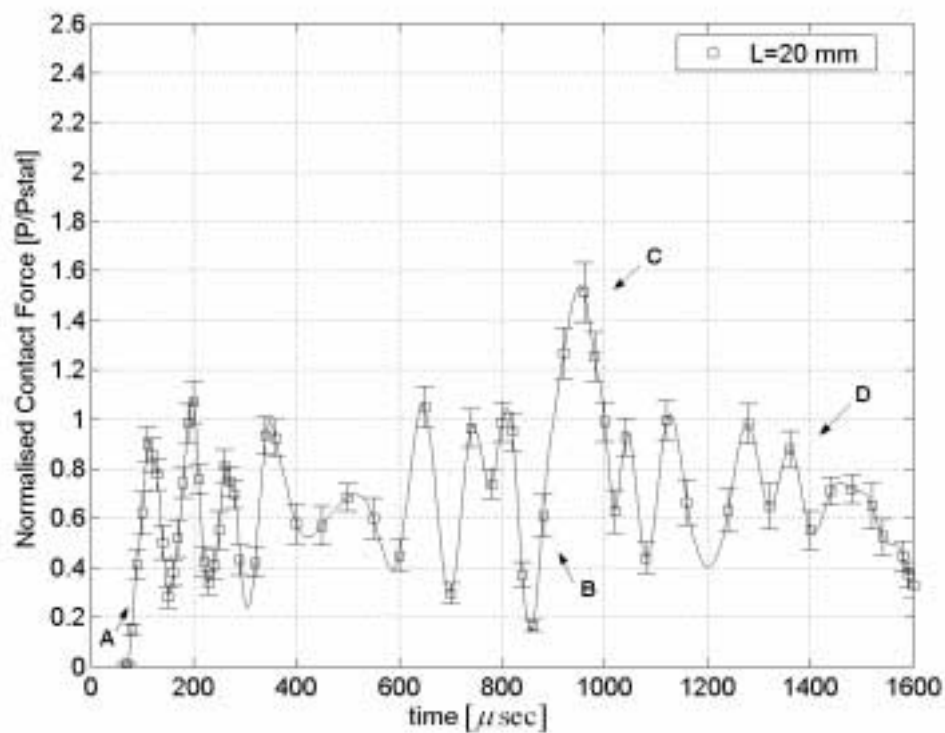
1. צורת המדרגה של גל ההלם בנקבה לא נשמרת אלא ישנו פירוק של הגל לגלים קטנים יותר. תופעה הדומה לזו שנצפתה ע"י Shukla et al. (1993b) ו Zhu et al. (1997).
2. האמפליטודה של כוח המגע עפ"י נתוני המדידה הפוטואלסטית (איור 4.7) בזמן מעבר ה TSW נעה סביב ערך ממוצע של 0.6 ואילו אמפליטודת המעוות נעה סביב ערך ממוצע של 1. כמו כן השינויים באמפליטודות עפ"י נתוני המדידה הפוטואלסטית חדים יותר ויורדים עד לערך של 0.2.
3. גל המאמצים המוחזר RSW מעלה את האמפליטודה ל 1.5 לערך.
4. גל הריווח TEW מוריד את האמפליטודה לרמה הממוצעת שהייתה לפני כן, ההתנהגות התנודתית נשארת.
5. גל הריווח המוחזר REW מוריד את האמפליטודה לרמה נמוכה עוד יותר.

גרפים 4.9 ו 4.10 מתארים את נקודת המגע בין דיסקות 4 ו 5. מהם ניתן לראות כי :

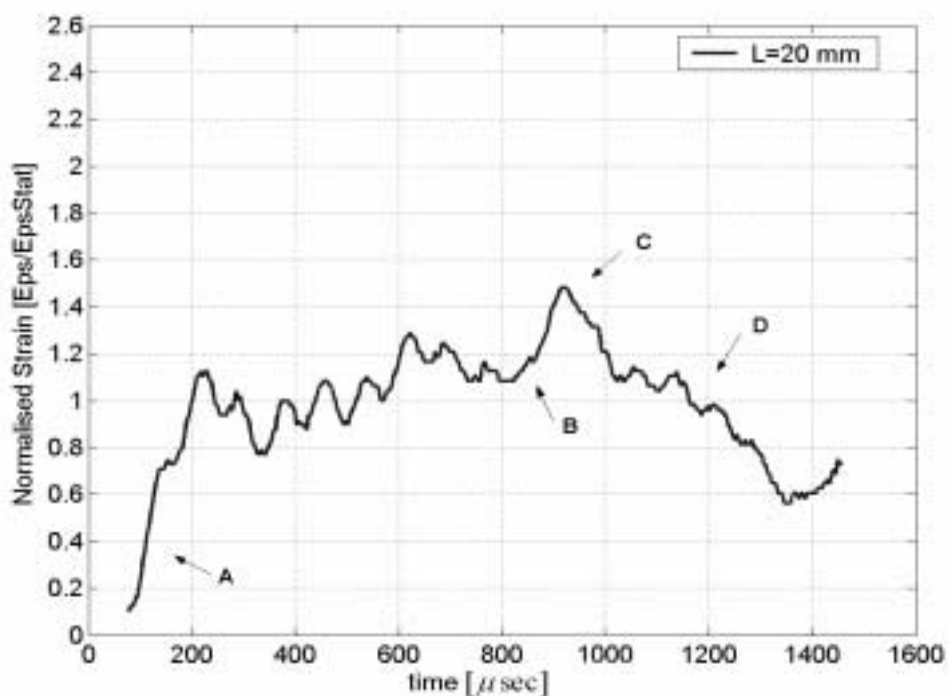
1. צורת המדרגה של גל ההלם בנקבה לא נשמרת אלא ישנו פירוק של הגל לגלים קטנים יותר. התופעה בולטת במיוחד לפני שמתחילות ההחזרות מגבולות התא, כלומר לגל ה TSW התנהגות תנודתית חזקה.
2. האמפליטודה של כוח המגע עפ"י נתוני המדידה הפוטואלסטית (איור 4.9) בזמן מעבר ה TSW נעה סביב ערך ממוצע של 0.6 ואילו אמפליטודת המעוות נעה סביב ערך ממוצע של 1. כמו כן השינויים באמפליטודות עפ"י נתוני המדידה הפוטואלסטית חדים יותר ויורדים עד לערך הנמוך מ 0.1.
3. גל המאמצים המוחזר RSW מעלה את האמפליטודה המקסימאלית ל 1.8 לערך עפ"י נתוני מדיד המעוות ול 2.2 עפ"י נתוני המדידה הפוטואלסטית, ערך הגבוה מזה שהיה בנקודת המגע בין דיסקות 1 ו 2.
4. גל הריווח TEW מוריד את האמפליטודה לרמה ממוצעת של 1, הגבוהה מעט מזו שהייתה לפני כן, ההתנהגות התנודתית מרוסנת יותר.
5. גל הריווח המוחזר REW מוריד את האמפליטודה לרמה נמוכה עוד יותר.

גרפים 4.11 ו 4.12 מתארים את נקודת המגע בין דיסקות 8 ו 9. מהם ניתן לראות כי :

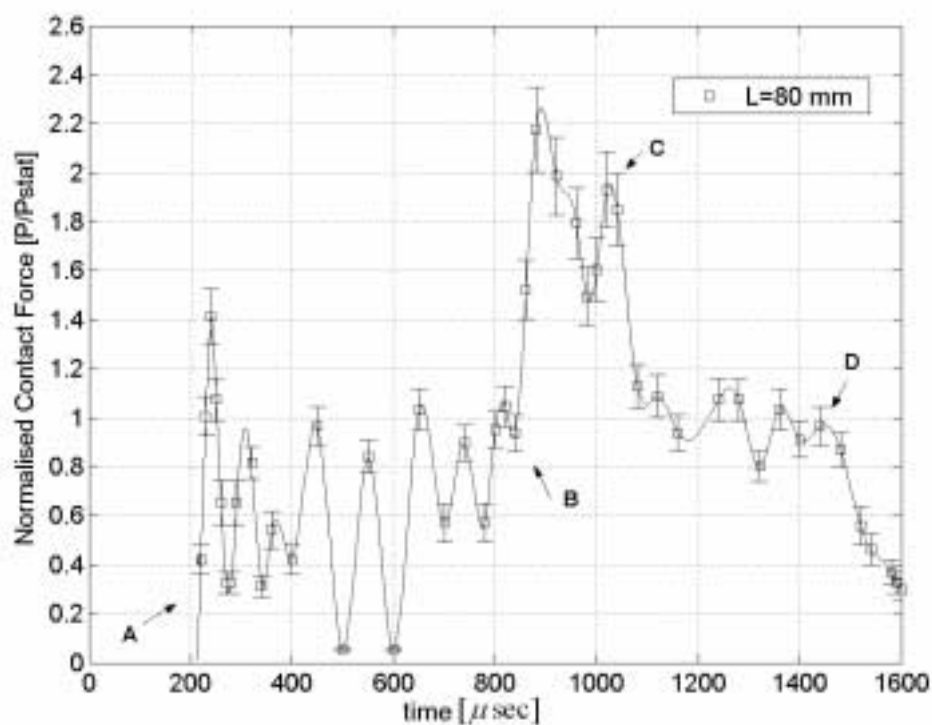
1. האמפליטודה של כוח המגע עפ"י נתוני המדידה הפוטואלסטית (איור 4.11) בזמן מעבר ה TSW נעה סביב ערך ממוצע של 0.6 ואילו אמפליטודת המעוות נעה סביב ערך ממוצע של 1. כמו כן השינויים באמפליטודות עפ"י נתוני המדידה הפוטואלסטית חדים יותר ויורדים עד לאפס כמעט.
2. גל המאמצים המוחזר RSW מעלה את האמפליטודה ל 2.2 לערך הן עפ"י נתוני מדיד המעוות והן עפ"י נתוני המדידה הפוטואלסטית, ערך הגבוה מזה שהיה בנקודת המגע בין דיסקות 1 ו 2 ודומה לזה שהיה בנקודת המגע בין דיסקות 4 ו 5.
3. גל הריווח TEW מוריד את האמפליטודה לרמה ממוצעת הגבוהה מעט מזו שהייתה לפני כן עם עליה מסוימת, ההתנהגות התנודתית מרוסנת יותר.
4. גל הריווח המוחזר REW מוריד את האמפליטודה לרמה נמוכה עוד יותר, דבר הבולט פחות מנתוני מדיד המעוות – איור 4.12.



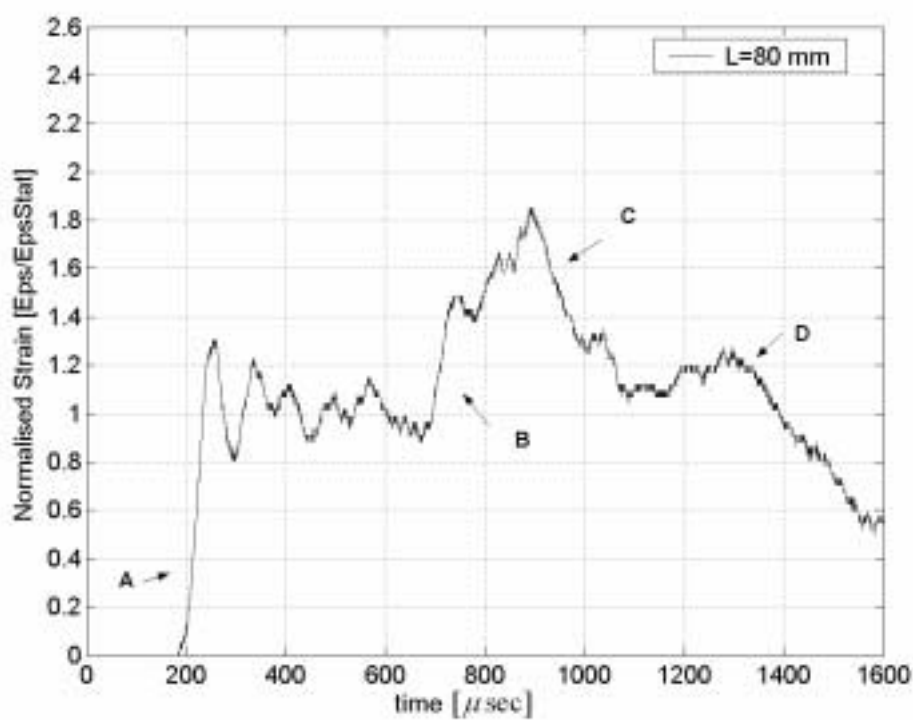
איור 4.7 : כוח מגע מנורמל בין דיסקות 1-2 עפ"י נתוני המדידה הפוטואלסטית,  $P_{stat}=73.5 \text{ N}$ .



איור 4.8 : מעוות מנורמל בין דיסקות 1-2,  $Eps_{Stat}= 1600 \mu strain$ .

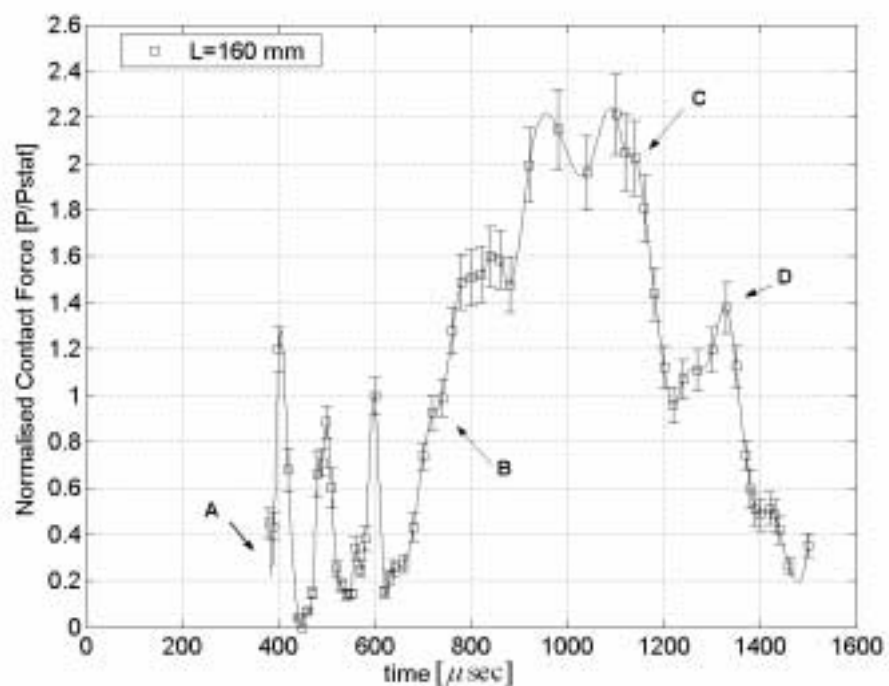


איור 4.9 : כוח מגע מנורמל בין דיסקות 4-5 עפ"י נתוני המדידה הפוטואלסטית,  $P_{stat}=73.5\text{ N}$ .

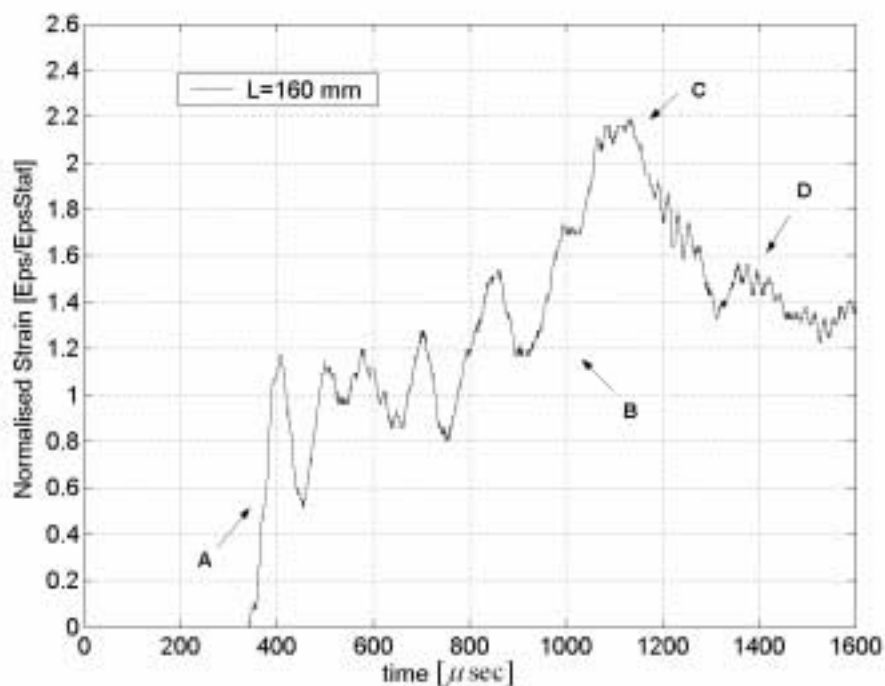


איור 4.10 : מעוות מנורמל בין דיסקות 4-5,  $Eps_{stat}=1600\text{ }\mu strain$ .





איור 4.11 : כוח מגע מנורמל בין דיסקות 8-9 עפ"י נתוני המדידה הפוטואלסטית,  $P_{stat}=73.5 \text{ N}$ .



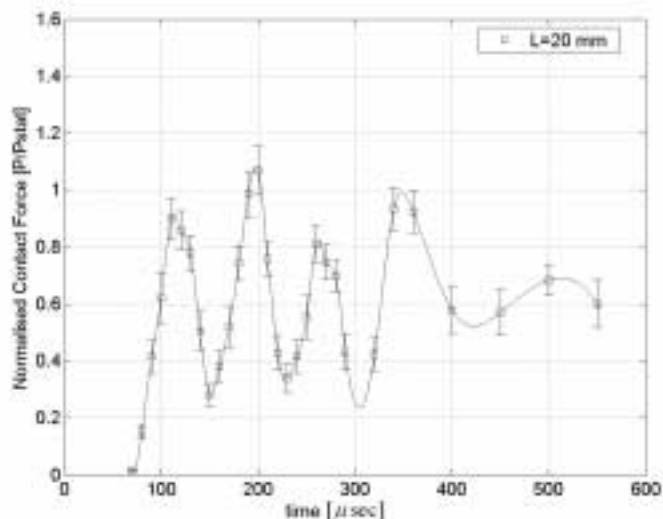
איור 4.12 : מעוות מנורמל בין דיסקות 8-9,  $Eps_{Stat}=1600 \mu strain$ .

#### 4.2.4 התפרקות הגל

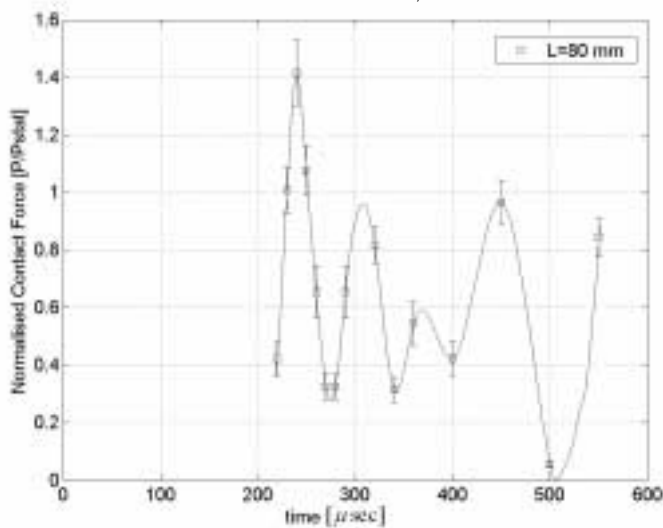
במחקרם של Shukla et al. (1993b) ו-Zhu et al. (1997) כפי שפורט בסעיף 1.2.1.5 נצפתה התופעה של התפרקות גל ארוך העובר בתווך גרגרי למספר גלים קצרים יותר, שנקראו ע"י Nesterenko (2001) סוליטונים (Solitary Waves). מחקרם התייחס למעבר הגל בתווך בכיוון אחד בלבד, ללא תופעת ההחזרות, לכן על מנת להשוות את תופעת התפרקות הגל במחקר זה עם מחקרם יובאו כאן גרפי התקדמות הגל עד לזמן ההגעה לדופן התחתונה, כלומר רק ה TSW. מאיורים 4.13-4.15 המתארים את הנתונים מהניסויים הפוטואלסטיים ניתן לראות כי:

1. בנקודת המגע בין דיסקות 1-2 האמפליטודה המקסימאלית של הגל השני מעט גבוהה יותר מזו של הגל הראשון וערכה כ 1.1. הזמן הממוצע בין אמפליטודות המקסימום הוא כ  $80 \mu\text{sec}$ , מאחר ומהירות הגל בקטע זה היא 431 מ/ש המרחק שעברה חזית הגל בזמן זה הוא כ 35 מ"מ.
2. בנקודת המגע בין דיסקות 4-5 האמפליטודה המקסימאלית של הגל הראשון היא 1.4 ואילו של הגלים הבאים אחריו נמוכה מ 0.9, כלומר תהליך ההתפרקות גרם לסידור מחדש של האנרגיה וגרם להעלאת האנרגיה של הגל המוביל. הזמן הממוצע בין אמפליטודות המקסימום הוא כ  $70 \mu\text{sec}$  והמרחק שעברה חזית הגל בזמן זה הוא כ 30 מ"מ.
3. בנקודת המגע בין דיסקות 8-9 האמפליטודה המקסימאלית של הגל הראשון היא 1.3 ואילו של הגל הבא אחריו כ 0.9, בגלל טווח השגיאה לא ניתן לקבוע בבירור שיש דעיכה באמפליטודה לעומת נקודת המגע בין דיסקות 4-5. איור 4.19 מראה את השתנות אמפליטודת הגל המקסימאלית לעומת המרחק. זמן המחזור, כלומר הזמן הממוצע בין אמפליטודות המקסימום הוא כ  $95 \mu\text{sec}$  והמרחק שעברה חזית הגל בזמן זה הוא כ 40 מ"מ.

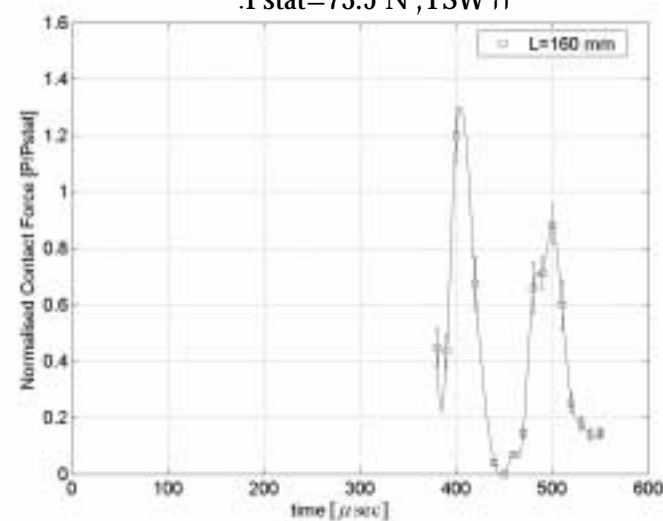
מאיורים 4.16 – 4.18 המתארים את הנתונים ממדידי המעוות ניתן לראות את אותן התופעות אולם האמפליטודה המקסימאלית נמוכה יותר. תופעות אלו דומות לאלו שהתקבלו ע"י Shukla et al. (1993b) ו-Zhu et al. (1997), אלא שבמקרה שלנו השרשרת לא הייתה ארוכה מספיק כדי לראות דעיכה באמפליטודה המקסימאלית.



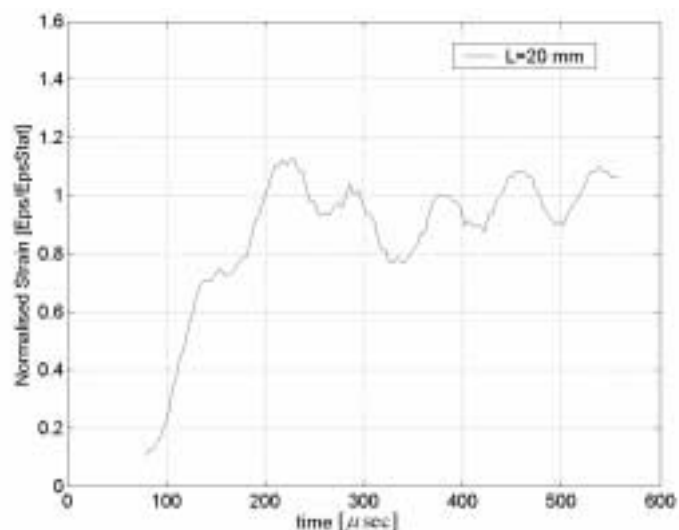
איור 4.13 : כוח מגע מנורמל בין דיסקות 1-2 עפ"י נתוני המדידה הפוטואלסטית בזמן מעבר ה  $P_{stat}=73.5 \text{ N}$ , TSW



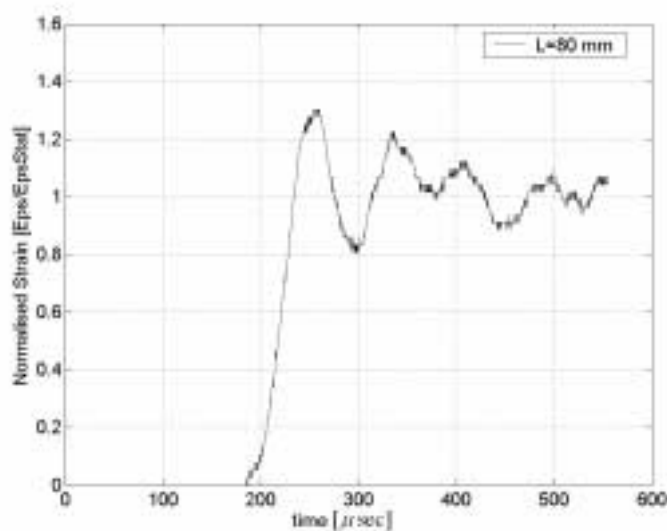
איור 4.14 : כוח מגע מנורמל בין דיסקות 4-5 עפ"י נתוני המדידה הפוטואלסטית בזמן מעבר ה  $P_{stat}=73.5 \text{ N}$ , TSW



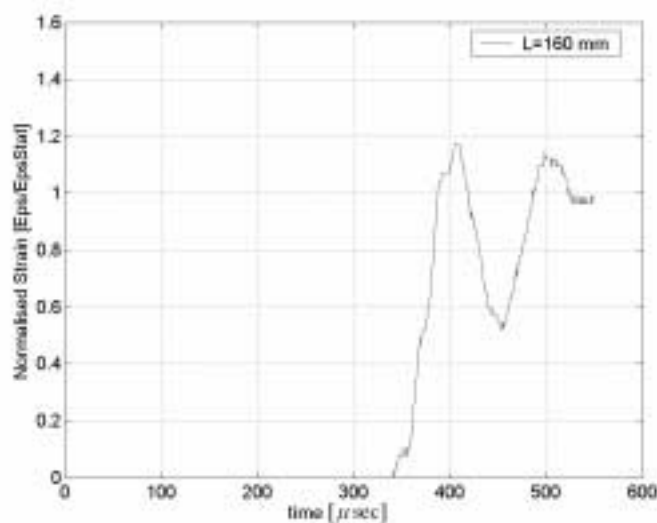
איור 4.15 : כוח מגע מנורמל בין דיסקות 8-9 עפ"י נתוני המדידה הפוטואלסטית בזמן מעבר ה  $P_{stat}=73.5 \text{ N}$ , TSW



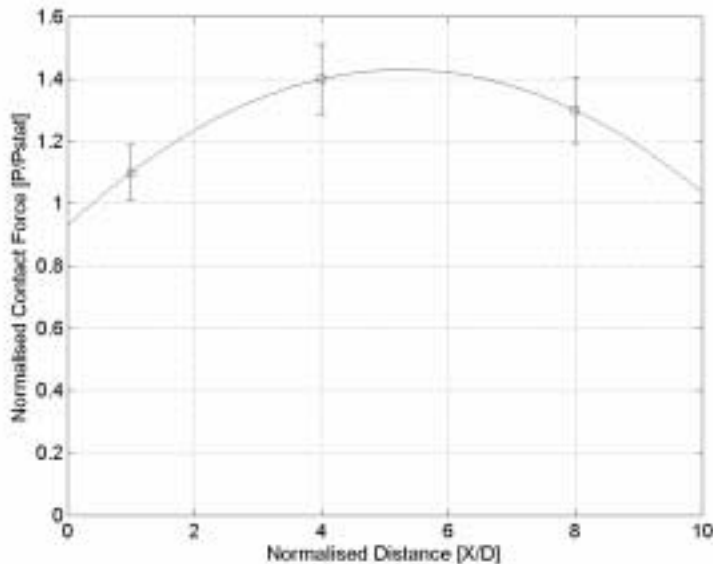
איור 4.16 : מעוות מנורמל בין דיסקות 1-2 בזמן מעבר ה TSW ,  $EpsStat=1600 \mu strain$



איור 4.17 : מעוות מנורמל בין דיסקות 4-5 בזמן מעבר ה TSW ,  $EpsStat=1600 \mu strain$



איור 4.18 : מעוות מנורמל בין דיסקות 8-9 בזמן מעבר ה TSW ,  $EpsStat=1600 \mu strain$



איור 4.19 : האמפליטודה המקסימאלית של גל ה TSW כתלות במרחק.  $P_{stat}=73.5 \text{ N}$ .

#### 4.2.5 הערכת מהירות הגל לאחר ההתפרקות

Nesterenko (2001) חקר את התופעה של התפרקות גל ארוך לגלים קצרים יותר שלהם קרא Solitary Waves או סוליטונים (Solitons), מחקרו התרכז בפיתוח פיתרון אנאליטי לבעיה ושילובו עם תוצאות ניסוייות. הפיתוח התייחס לגל מחזורי כאשר המעוות המקסימאלי ומהירות החלקיק המתאימה לו בסוליטון בודד קרובים לאלו שבגל המחזורי, לכן ניתן לחשב את מהירות הסוליטון  $V_s$ , עפ"י

$$V_s = \sqrt{\frac{4 \cdot c^2 \sqrt{\epsilon_{\max}}}{5}} \quad (4.1)$$

כאשר  $c$  היא מהירות הקול בחומר ו  $\epsilon_{\max}$  הוא המעוות המקסימאלי. כוח המגע המקסימאלי מהניסויים הפוטואלסטיים לפני החזרות מדופן התא, כלומר בזמן התקדמות ה TSW, נמדד כאמור בנקודת המגע בין דיסקות 4 ו 5 ושווה ל  $P = 1.4 \cdot P_{Stat} = 103 \text{ N}$ . עפ"י התיאוריה של Hertz ערך המעוות המתאים לכוח זה במרחק 1.5 מ"מ מנקודת המגע הוא כ  $1000 \mu\text{strain}$  לכן מהירות הסוליטון עפ"י התיאוריה של Nesterenko (2001) תהיה:

$$V_s = \sqrt{\frac{4 \cdot 2620^2 \sqrt{0.001}}{5}} = 417 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \quad (4.2)$$

מהירות זו קרובה למהירות התקדמות גל המאמץ שנמדדה בניסוי, 431 מ/ש.

### 4.3 השפעת אורך השרשרת

על מנת לראות כיצד משפיע אורך השרשרת על התקדמות הגל נעשו מספר ניסויים נוספים עם מדידי מעוות בשרשרת ארוכה יותר וקצרה יותר.

#### 4.3.1 שרשרת עם 22 דיסקות

שני תאי ניסוי זהים הוצמדו זה לזה כך שניתן היה להכניס לתוכם 22 דיסקות, התא עם מדידי המעוות הושם תחילה בחלק העליון כך שמדידי המעוות מדדו את המעוותים בקרבת נקודות המגע 1-2, 4-5, 11-12. על הדיסקה העליונה הונחה חתיכה מלבנית (Puncher) בגובה 7 מ"מ ומתחת לדיסקה התחתונה הונחה חתיכה מלבנית בגובה 16 מ"מ (איורים 4.20, 4.21). לאחר מכן הוחלפו התאים כך שנמדד המעוות בנקודות המגע בין דיסקות 12-13, 15-16, 22 והחתיכה המלבנית התחתונה, החתיכות המלבניות הוחלפו אף הן כך שעל הדיסקה העליונה הונחה החתיכה המלבנית בגובה 16 מ"מ ומתחת לדיסקה התחתונה הונחה החתיכה המלבנית בגובה 7 מ"מ (איורים 4.22, 4.23).

##### 4.3.1.1 מהירות הגל

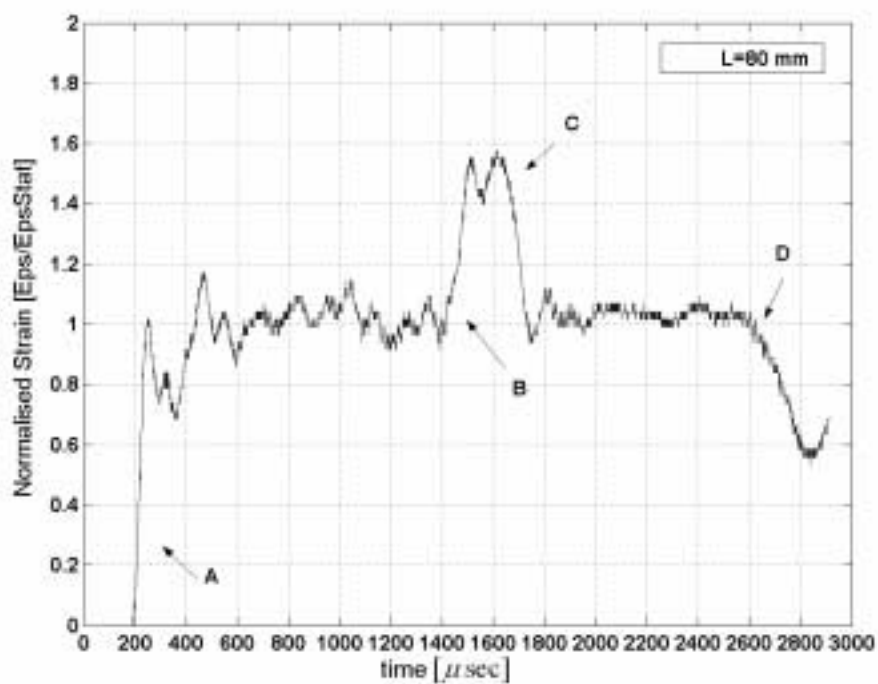
מניסויים אלו ניתן לראות כי:

1. המהירות הממוצעת של גל המאמצים המועבר TSW היא כ 530 מ/ש, גבוהה משרשרת של 11 דיסקות, כנראה בגלל שמשקל הדיסקות גורם למגע טוב יותר בניהם. ניתן לראות שוב שמהירות הגלים גבוהה יותר כאשר השרשרת נתונה להעמסה התחלתית שגורמת למגע טוב יותר בין הדיסקות.
2. המהירות הממוצעת של גל המאמצים המוחזר, ה RSW היא כ 800 מ/ש, מהירות הגבוהה מזו של ה TSW כמו בשרשרת של 11 דיסקות. המהירות של גל זה גבוהה יותר מזו של 11 דיסקות (700 מ/ש).
3. המהירות הממוצעת של גל הריווח, ה TEW היא כ 910 מ/ש, ושל גל הריווח המוחזר ה REW היא כ 800 מ/ש, מהירויות אלה גבוהות יותר מאלו שב 11 דיסקות.

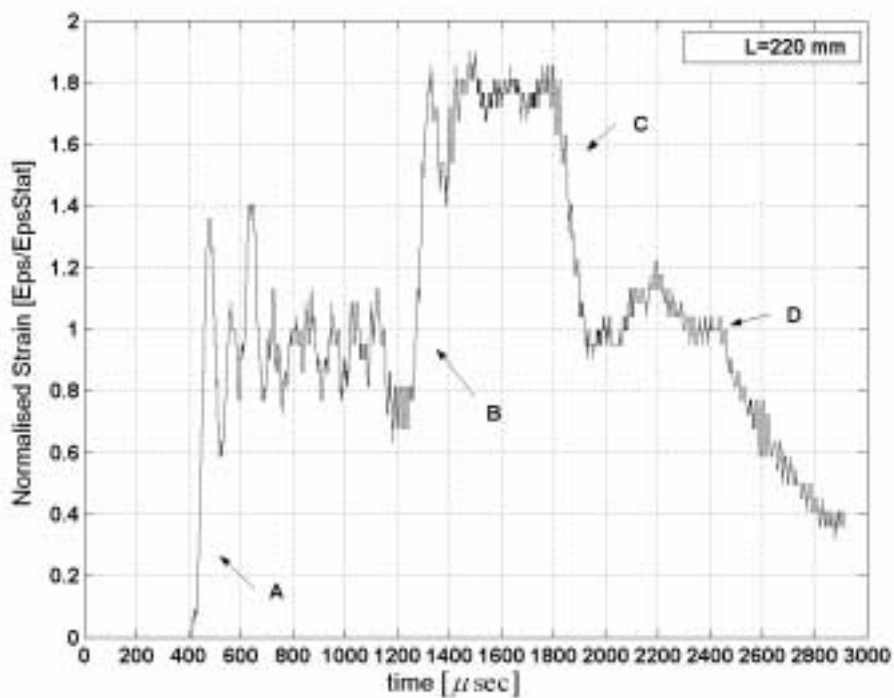
### 4.3.1.2 צורת הגל

ע"י השוואה בין שרשרת של 22 דיסקות ו 11 דיסקות ניתן לראות כי

1. בנקודת המגע בין דיסקות 4-5 הזמן שלוקח לתופעת ההחזרות להשלים מחזור שלם (TSW, RSW, TEW, REW) הוא  $2600 \mu\text{sec}$  לעומת  $1600 \mu\text{sec}$  בשרשרת של 11 דיסקות. באיור 4.5 המראה את המעוות בנקודת המגע התחתונה ניתן להבחין בחמישה מחזורים כאלה בעוד שבשרשרת של 22 דיסקות ניתן להבחין בבירור רק במחזור אחד, דבר המצביע על בליעת אנרגיה רבה יותר בשרשרת הארוכה יותר.
2. האמפליטודה של גל המאמצים המוחזר RSW בנקודת המגע בין דיסקות 4-5 נמוכה מ 1.6 בשרשרת של 22 דיסקות (איור 4.20) לעומת אמפליטודה הגבוהה מ 1.8 בשרשרת של 11 דיסקות (איור 4.10), כנראה בשל איבודי אנרגיה גבוהים יותר. ניתן לראות שהערך הממוצע של ה RSW בשרשרת של 22 דיסקות נמוך מזה שבשרשרת של 11 דיסקות.
3. תופעת ההחזרות דומה לזו שנצפתה בשרשרת של 11 דיסקות.
4. גל הריווח TEW מוריד את האמפליטודה לערך שהיה לאחר התקדמות גל המאמצים ה TSW, אולם בשני סוגי השרשרות ישנה תופעה שכלל שמתקרבים לתחתית ישנה עלייה באמפליטודה לאחר גל הריווח (עד שגל הריווח המוחזר REW מוריד אותה שוב). מעקב אחרי ה TEW באיורים 4.20-4.23 מראה שהאמפליטודה לאחר גל זה יורדת ועולה שוב בעוצמה גבוהה יותר ככל שמתקדמים לתחתית. איורים 4.12 ו 4.23 מצביעים על התנהגות דומה בשני סוגי השרשרות.

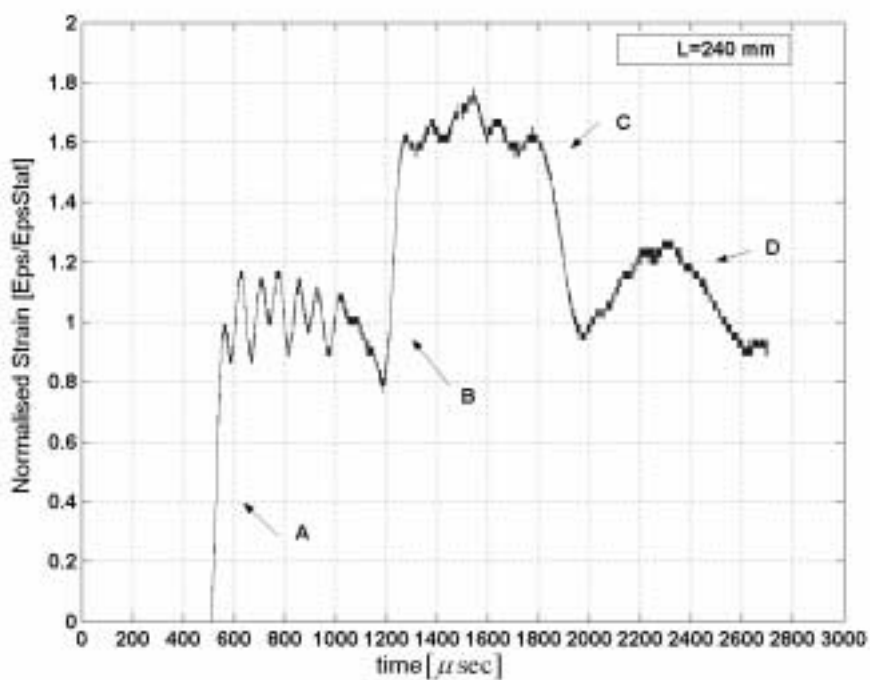


איור 4.20 : מעוות מנורמל בין דיסקות 4-5,  $EpsStat=1640\ \mu\text{strain}$

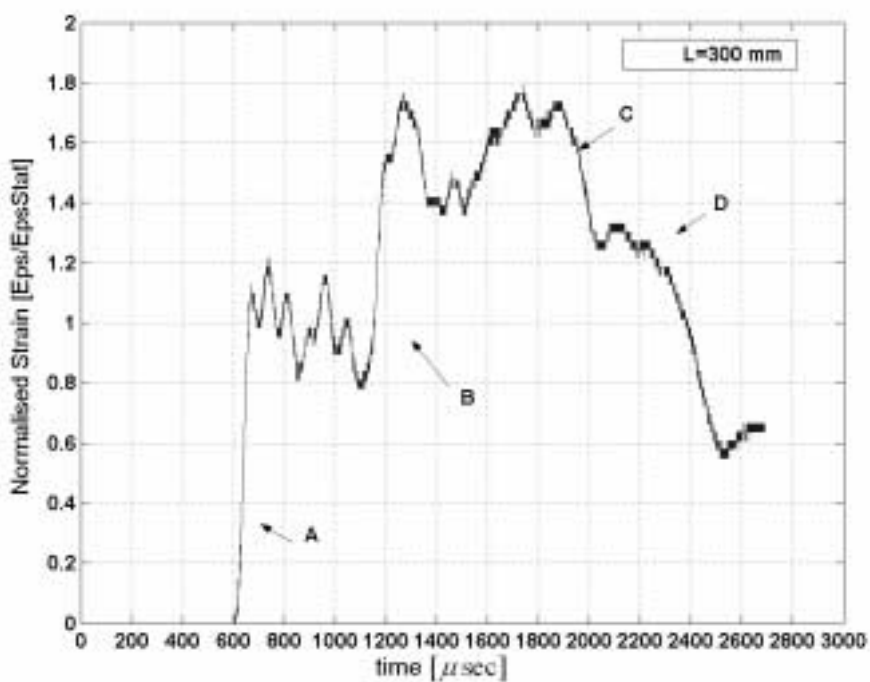


איור 4.21 : מעוות מנורמל בין דיסקות 11-12,  $EpsStat=920\ \mu\text{strain}$





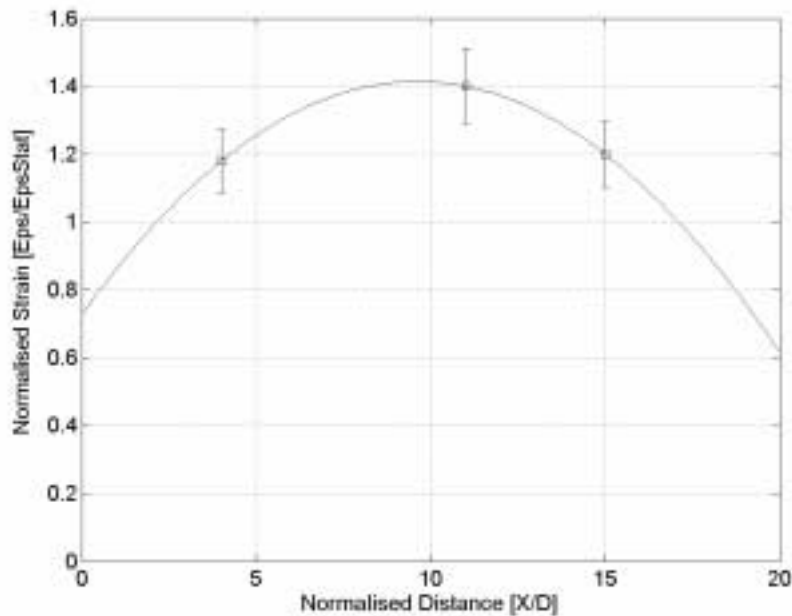
איור 4.22 : מעוות מנורמל בין דיסקות 12-13,  $EpsStat = 1640 \mu strain$



איור 4.23 : מעוות מנורמל בין דיסקות 15-16,  $EpsStat = 1440 \mu strain$

### 4.3.1.3 התפרקות הגל

ניתן לראות כי בדומה לשרשרת של 11 דיסקות הגל מתפרק לאוסף גלים קצרים יותר, דבר הבולט במיוחד במעבר גל המאמצים ה TSW. ככל שמתקדמים לעבר הדיסקות התחתונות צורת הסוליטונים נעשית ברורה יותר והזמן הממוצע בין אמפליטודות המקסימום מתייזב על כ  $75\mu\text{sec}$ , מאחר ומהירות הגל בקטע זה היא 520 מ/ש המרחק שעברה חזית הגל בזמן זה הוא כ 40 מ"מ. איור 4.24 מראה שהאמפליטודה המקסימאלית של ה TSW מתנהגת בצורה דומה לזו שבשרשרת בת 11 דיסקות.

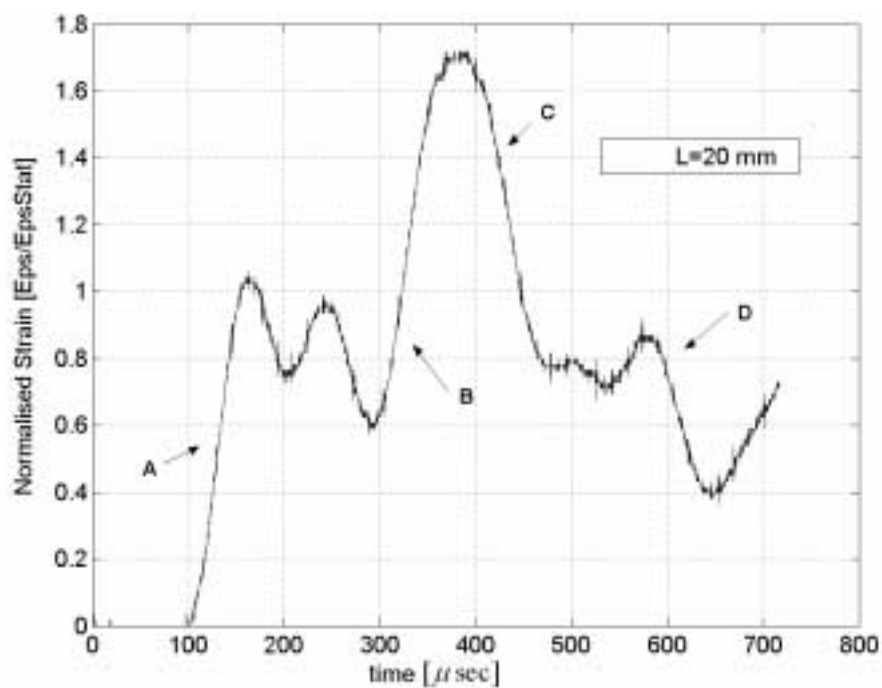


איור 4.24 : האמפליטודה המקסימאלית של גל ה TSW כתלות במרחק בשרשרת של 22 דיסקות.

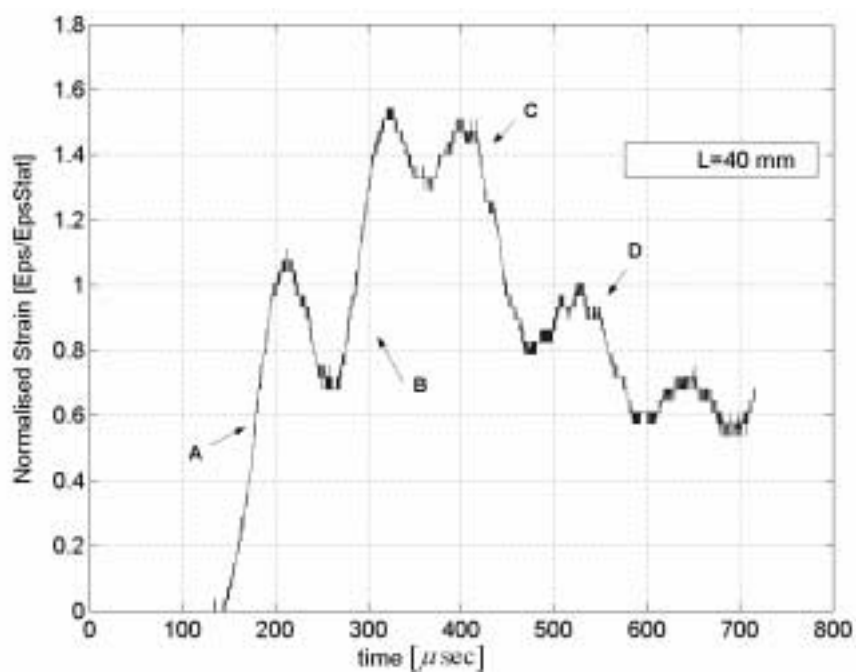
### 4.3.2 שרשרת עם 3 דיסקות

תא הניסוי הותאם לשרשרת בת שלוש דיסקות ע"י הכנסת מוט אלומיניום באורך של 160 מ"מ לתחתית תא הניסוי, מעליו הושמה חתיכה מלבנית של חומר פוטואלסטי PSM-9 בעובי 4.4 מ"מ ומעל הדיסקה העליונה חתיכה מלבנית (Puncher) בעובי 7 מ"מ. איורים 4.25 ו 4.26 המתארים את המעוות בנקודות המגע 1-2 ו 2-3, בהתאמה. מאחר והמרחק בין נקודות המדידה קצר לא נעשתה הערכה של המהירות, אך ניתן לראות כי:

1. הזמן שלוקח לתופעת ההחזרות להשלים מחזור שלם (TSW, RSW, TEW, REW) הוא כ  $650 \mu\text{sec}$  לעומת  $1600 \mu\text{sec}$  בשרשרת של 11 דיסקות ו  $2600 \mu\text{sec}$  בשרשרת של 22 דיסקות.
2. האמפליטודה של גל המאמצים המוחזר RSW בנקודת המגע בין דיסקות 1-2 היא כ 1.7 ו בנקודת המגע בין דיסקות 2-3 היא כ 1.5 ערכים קרובים לאלו שנראו בנקודת מגע 1-2 בשרשרת של 11 דיסקות (איור 4.7).
3. גל המאמצים TSW מתחיל להתפרק, בנקודת המגע 1-2 ישנה התפרקות לשני גלים שהזמן בין האמפליטודות המקסימאליות שלהן הוא כ  $80 \mu\text{sec}$ . בנקודת מגע 2-3 ישנה התפרקות לגל יחיד עד להגעת הגל המוחזר ה RSW.
4. גל הריווח TEW מוריד את האמפליטודה לערך שהיה לאחר התקדמות גל המאמצים ה TSW, אך שוב כמו בשרשרת של 11 דיסקות ושל 22 דיסקות, בדיסקה הקרובה יותר לתחתית ישנה עלייה באמפליטודה לאחר גל הריווח (עד שגל הריווח המוחזר REW מוריד אותה שוב).



איור 4.25 : מעוות מנורמל בין דיסקות 1-2,  $EpsStat = 2400 \mu strain$

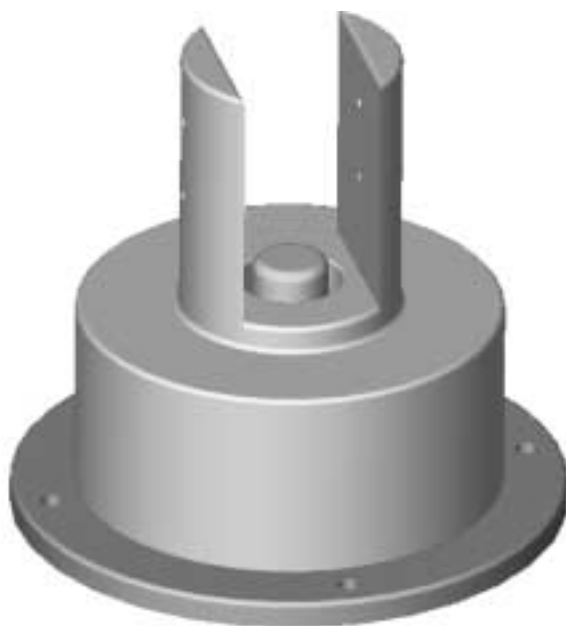


איור 4.26 : מעוות מנורמל בין דיסקות 2-3,  $EpsStat = 1160 \mu strain$

## 4.4 הערכת השגיאה

### 4.4.1 השגיאה בחישוב כוח המגע עפ"י השיטה הפוטואלסטית

כדי לחשב את כוח המגע עפ"י תמונת שדה המאמצים הפוטואלסטי יש תחילה לצלם את הדיסקה ולנתח את התצלום בעזרת תוכנה מתאימה, במקרה זה Mscope Player אשר מאפשרת להמיר את הפיקסלים לאורך. בתהליך זה ישנו עיוות בלתי נמנע של התמונה בגלל האוריינטציה של המצלמה יחסית לאובייקט, כלומר אי מושלמות במקבילות המצלמה לדיסקות. כדי להעריך את העיוות צולמו שלוש מטבעות של 0.5 ש"ח, 1 ש"ח ו 10 א"ח, בחמש סדרות צילומים. הקוטר נמדד עפ"י המרחק האופקי ועפ"י המרחק האנכי ונמדדה הסטייה ביניהם שהגיעה לערך מקסימאלי של 2%. בניסויים הדינאמיים תמונת הדיסקה בה חושב כוח המגע נגזרה מתוך תמונת השרשרת והוגדלה, הוקפד כי היחס בין הקוטר האנכי לאופקי לא יעלה על 2%. הוצאה של האיזוכרומטה (סדר הפס) והקואורדינאטה המתאימה מלווה בחוסר דיוק נוסף בגלל עובי האיזוכרומטה, נתונים אלו מוכנסים לסכימה איטרטיבית המבוססת על משוואות המגע הלא ליניאריות של Hertz על מנת לחשב את כוח המגע. שילוב של גורמי שגיאה שונים המוכנסים לחישוב במערכת משוואות לא ליניאריות מקשה להעריך את השגיאה עפ"י התרומה של כל חלק בנפרד ויש לעשות זאת בדרך אחרת: הוחלט להפעיל על הדיסקה כוח ידוע ולהעריך את הסטייה של הכוח המחושב בנקודת המגע מערך זה. הכוח נמדד בעזרת מד כוח (Load Cell) מתוצרת Kyowa, Japan שישב בתוך תושבת מיוחדת לאחיזת הדיסקה כמוראה באיור 4.27. כל המתקן נמצא בתוך מתקן לחיצה הלוחץ את הדיסקה בכוח שנימדד ע"י מד הכוח. בצורה זו הדיסקה הועמסה בשלושה עומסים: 50 N, 100 N, 150 N ושדה המאמצים צולם במערכת הצילום שנעשה בה שימוש בניסויים הדינאמיים, הן בשדה שחור והן בשדה לבן סה"כ 6 תמונות. על מנת לוודא ששגיאת מד הכוח לא משפיעה על הערכת השגיאה יוצרו 4 תמונות נוספות בעזרת שילוב המשוואות של Timoshenko & Goodyier (1951) ומשוואות המגע של Hertz באזור המגע, התמונות עובדו וחושב כוח המגע בצורה שהוסברה לעיל. התוצאות הראו שבעומס הנמוך (50 N) השגיאה המקסימאלית עומדת כ 14% וזאת בגלל שאזור המגע קטן יחסית ויש פחות נקודות שניתן להוציא מהן נתונים, לעומת זאת בעומסים הגבוהים מ 50 N אזור המגע מאפשר להוציא מספר גדול יותר של נתונים והשגיאה קטנה בהתאם לערך מקסימאלי של כ 8%. ערך זה מציין את השגיאה המקסימאלית לאחר התחשבות בסטייה הנובעת מאי הדיוק בהוצאת הנתונים בגלל עובי האיזוכרומטה.



איור 4.27 : מד הכוח

#### 4.4.2 השגיאה במדידת המעוות

מתח אי האיזון בחיבור רבע גשר נתון ע"י :

$$V_o = \frac{\delta}{4} \cdot V_I \quad (4.3)$$

כאשר  $\delta$  היא השינוי היחסי בהתנגדות מדיד המעוות. למדידי המעוות שבניסוי דיוק של  $\pm 0.2\%$  לכן השגיאה במתח אי האיזון היא  $\pm 0.05\%$  שהיא זניחה. אות זה מוגבר במגבר עם שגיאה של  $\pm 1\%$  ומציין את המעוות ולכן זוהי השגיאה בקריאת המעוות. בסעיף 2.3.2.2 חושבה הסטייה של המעוות במרכז המדיד לעומת המעוות הממוצע תחת כל שטח המדיד ונמצא כי ערכה הוא  $\pm 4\%$ , כמו כן הניסויים הראו שלסטייה ממוקום המדיד לאורך קו ישר מתחת לשטח המגע השפעה רבה על ערך המעוות כך שהשגיאה בקריאה גבוהה יותר, לכן הוחלט לנרמל את המעוות יחסית לערך הנמדד לאחר התייצבות הגל, כלומר כאשר הגל המתקדם בחומר דועך והקריאה מתייצבת על ערך קבוע.

#### 4.4.3 גל ההלם בנקבה

התופעות שנחקרו בניסויים נבדקו לאורך 3 msec, בזמן זה הלחץ של גל ההלם בנקבה עמד על  $3.75 \pm 0.25 \text{ bar}$  כלומר סטייה מקסימאלית של 7% (שהיא מעבר לשגיאת מתמר הלחץ והמגבר שעומדים על כ 1%).

## 4.5 מסקנות

תוצאות הניסויים שנערכו מראים כי התקדמות הגל בשרשרת מורכבת מארבעה סוגי גלים (לפי הסדר): גל מאמצים המגיע מנקבת ההלם בגבול העליון של התא, גל מאמצים המוחזר מהגבול התחתון של התא, גל ריווח המגיע מנקבת ההלם בגבול העליון של התא וגל ריווח המוחזר מהגבול התחתון של התא וחוזר חלילה עד למצב שיווי משקל.

מהירות הגל בשרשרת ישרה של דיסקות נמוכה מזו שבחומר רציף. מהירות גל המאמצים ההתחלתי נמוכה יותר מהגלים הבאים אחריו מפני שהוא מתקדם בשרשרת שעדיין לא נדחסה.

גל ההלם המגיע מנקבת ההלם מתפרק לגלים קצרים יותר בעלי זמן מחזור ממוצע של  $75 \mu\text{sec}$  לערך, כאשר עוצמה של הגל המוביל גבוהה מזו של שאר הגלים ומזו של הגל בדיסקות שהיו לפני כן.

ככל שמתקרבים לגבול התחתון של תא הניסוי ישנה עליה בעוצמת הגל לאחר גל הריווח.

שרשרת ארוכה יותר של דיסקות גורמת לבליעה גבוהה יותר של אנרגיה ולדעיכה מהירה יותר של הגלים המתקדמים בחומר.

## 4.6 סיכום

מטרת העבודה הייתה לבנות מערכת ניסוי שתאפשר לחקור את תופעת התקדמות גלים בתווך גרגרי המדומה ע"י שרשרת דיסקות גליליות העשויות מחומר פוטואלסטי. הגל הפוגע בשרשרת הינו גל הלם הנוצר באמצעות נקבת הלם ומערכת אופטית המבוססת על מצלמות CCD ולייזר הורכבה על מנת לצלם את שדה המאמצים הפוטואלסטי בשרשרת בזמנים דיסקרטיים שונים. לצורך חישוב כוח המגע עפ"י תמונת שדה המאמצים הפוטואלסטי נעשה שימוש בסכימה איטרטיבית המבוססת על משוואות המגע של Hertz, הנתונים הושאו עם אלו שהתקבלו ממדידי מעוות המודדים את המעוות בקרבת נקודות המגע. נערכו ניסויים בשרשרת של 11 דיסקות אשר הראו את אופן התקדמות הגלים בשרשרת וההחזרות מגבולות תא הניסוי ועל מנת לבדוק כיצד אורך השרשרת משפיע על התופעות שנצפו נערכו ניסויים נוספים עם מדידי מעוות בשרשרת של 22 דיסקות ושרשרת של 3 דיסקות.

## רשימת מקורות

Ammi, M., Travers, T., Bideau, D., Delugeard, Y., Messenger, J. C., Troadec, J. P. and Gervois, A. (1990) "Role of angular correlations on the mechanical properties of 2D packing of cylinders", *Journal of Condense Matter*, Vol. 2, pp. 9523-9530.

Britan, A., Ben-Dor, G., Igra O. and Shapiro, H. (2001) "Shock wave attenuation by granular filters", *International Journal of Multiphase Flow*, Vol. 27, pp. 617-634.

Britan, A. and Levy, A. (2001) "Weak shock wave interaction with inert granular media", in *Handbook of Shock Waves*, Eds. G. Ben-Dor, O. Igra and T. Elperin, Vol. 2, pp. 597-666, Academic Press.

Dally, W. J., Riley, F.W. (1978) "*Experimental Stress Analysis*", pp. 127-482, McGraw-Hill Kogakusha.

Durelli, A. J. and Shukla, A. (1983) "Identification of isochromatics fringes", *Experimental Mechanics*, Vol. 23, No. 1, pp. 111-119.

Nesternko, V. F. (2001) "*Dynamics of Heterogeneous Materials*", pp. 3-25, Springer.

Oda, M., Konishi, J., Nemat, N. S. (1982) "Experimental micromechanical evaluation of strength of granular materials: effects of particle rolling", *Mechanics of Materials*, Vol. 1, pp. 269-283.

Ramesh, K. (2000) "*Digital Photoelasticity - Advanced Techniques and Applications*", pp. 26-30. Springer.

Rossmannith, H. P. and Shukla, A. (1982) "Photoelstic investigation of dynamic load transfer in granular media", *Acta Mechanica*, Vol. 42, pp. 211-225.



Saad, M.H., Shukla, A., Mei, H., and Zhu, C. Y., (1989) "The effect of voids and inclusions on wave propagation in granular materials", *Micromechanics and Inhomogeneity – The Toshio Mura Anniversary Volume*, pp. 367-383.

Sanford, R.J. and Dally, J.W. (1979) "A general method for determining mixed mode stress intensity factors from isochromatic fringe patterns", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 11, pp. 621-633.

Schulgasser, K. (1998) "Contact Stresses", *Lecture Notes*, Ben Gurion University, pp.1-73.

Sienkiewicz, F., Shukla, A., Sadd, M., Zang, Z., and Dvorkin, J. (1996) "A combined experimental and numerical scheme for the determination of contact loads between cemented particles", *Mechanics of Materials*, Vol. 22, pp. 43-50.

Shukla, A.(1991) "Dynamic photoelastic studies of wave propagation in granular media", *Optics and Lasers in Engineering*, Vol. 14, pp. 165-184.

Shukla, A. and Damania, C. (1987) "Experimental investigation of wave velocity and dynamic stresses in an assembly of disks", *Experimental Mechanics*, Vol. 27, No. 3, pp. 268-281.

Shukla, A., Martin H. Sadd, Singh, R., Tai, Q.M. and Vishwanathab S. (1993a) "Role of particle shape and contact profile on the dynamic response of particulate materials", *Optics and Lasers in Engineering*. Vol. 19, pp. 99-119.

Shukla, A. and Nigham, H. (1985) "A numerical experimental analysis of the contact stress problem", *Journal of Strain Analysis*, Vol. 20, No. 4, pp. 241-245.

Shukla, A. and Rossmanith, H. P. (1986) "Dynamic photoelastic investigation of wave propagation and energy transfer across contacts", *Journal of Strain Analysis*, Vol. 21, No. 4, pp. 213-218.

Shukla, A., Saad, M.H. and Mei H. (1990) "Experimental and computational modeling of wave propagation in granular materials", *Experimental Mechanics*, Vol. 30, pp. 377-381.

Shukla, A., Saad, M.H. , Xu, Y. and Tai Q. M. (1993b) "Influence of loading pulse duration on dynamic load transfer in simulated granular medium", *Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 41, No. 11, pp. 1795-1808.

Shukla, A, Zhu, C. Y. and Xu, Y. (1992) "Dynamic stresses in granular assemblies with microstructural defects", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 118, No. 1, pp. 190-203.

Smith, J. O. and Chang, K. L. (1953) "Stresses due to tangential and normal loads on an elastic solid with application to some contact stress problems", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 20, pp. 157-166.

Timoshenko, S. and Goodier, J. N. (1951) "*Theory of Elasticity*", pp. 107-111, McGraw-Hill.

Travers, T., Ammi, M., Bideau, D., Gervois, A., Messenger J. C. and Troadec J. P. (1987) "Uniaxial compression of 2d packing of cylinders. Effects of weak disorder", *Europhysics Letters*, Vol. 4. No. 3, pp. 329-332.

Travers, T., Ammi, M., Bideau, D., Gervois, A., Messenger J. C. and Troadec J. P. (1988) "Mechanical size effects in 2D granular media", *Journal De Physique*, pp. 939-948.

Xu, Y. and Shukla, A (1990) "Stress wave velocity in granular medium", *Mechanics Research Communications*, Vol. 17, No. 6, pp. 382-391.

Xu, Y. and Shukla, A. (1993) "Evaluation of static and dynamic contact stress in simulated granular particles using strain gauges", *Journal of Testing and Evaluation*, Vol. 21, pp. 178-187.

Zhu, C., Saad, M.H. and Shukla, A. (1988) "Angular dependence of dynamic load transfer due to explosive loading in two dimensional granular aggregates", Journal of Strain Analysis, Vol. 23, No. 3, pp. 121-127.

Zhu, C., Shukla, A. and Saad, M.H. (1991) "Prediction of dynamic contact loads in granular assemblies", Journal of Applied Mechanics, Vol. 58, pp. 341-346.

Zhu, Y., Sienkiewicz, F., Shukla, A. and Saad, M.H. (1997) "Propagation of explosive pulses in assemblies of disks and spheres", Journal of Engineering Mechanics, Vol. 123, No. 10, pp. 1050-1059.

לא ידוע (2000), "ניתוח מאמצים באמצעות מודל פוטואלסטי", מעבדה הנדסית 014005, הפקולטה להנדסה אזרחית, הטכניון.

לא ידוע (2000), "מדידי עיבור", מעבדת מכשור ומדידות, המחלקה להנדסת מכונות, אוניברסיטת בן גוריון בנגב, עמ' 1-5.

## נספח 1 חישוב תכונות החומר הפוטואלסטי

כאמור בסעיף 3.2 הדיסקות לניסויים הוכנו מפלטה של חומר פוטואלסטי PSM 9 בעזרת עיבוד שבבי, דבר היכול להשפיע על התכונות המכאניות של החומר. בנוסף, ייתכן וערכים אלו מעט שונים עבור ניסויים דינאמיים לכן הוחלט לחשב אותם עפ"י מהירות הקול בחומר.

מהירות הקול בחומר נבדקה במעבדה ונמצא בדיוק של 1% כי המהירות האורכית היא

$$c_l = 2620 \frac{m}{sec} \text{ והמהירות הרוחבית היא } c_s = 1160 \frac{m}{sec}.$$

### 1. חישוב מודול פואסון

הקשר בין מהירויות הקול בחומר למודול הדינאמי  $E'$  ומודול הגזירה  $G$  נתון ע"י:

$$c_l = \sqrt{\frac{E'}{\rho}} \quad (1)$$

$$c_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (2)$$

לכן נקבל:

$$\frac{c_l^2}{c_s^2} = \frac{E'}{G} \quad (3)$$

הערכים של  $E'$  ושל  $G$  ניתנים לחישוב עפ"י מודול יאנג ומודול פואסון ע"י:

$$E' = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (4)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (5)$$

הצבה למשוואה 3 תיתן

$$\frac{c_l^2}{c_s^2} = \frac{E(1-\nu) \cdot 2(1+\nu)}{(1+\nu) \cdot (1-2\nu)E} = \frac{2(1-\nu)}{(1-2\nu)} = \frac{2620^2}{1160^2} \quad (6)$$

מכאן ערכו של מודול פואסון יהיה  $\nu = 0.378$ .

## 2. חישוב מודול יאנג

את מודול יאנג ניתן לחשב ע"י מודול הגזירה ומהירות הגל הרוחבית:

$$G = \rho \cdot c_s^2 = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (7)$$

↓

$$E = \rho \cdot c_s^2 \cdot 2(1+\nu) = 1230 \cdot 1160^2 \cdot 1.378 \cdot 2 = 4.56 [GPa]$$

ניתן לראות שערכים אלו אכן שונים מהערכים שניתנו ע"י היצרן (טבלה 3.2).

## נספח 2 כיוול הקבוע הפוטואלסטי

כלל חומר פוטואלסטי ישנו קבוע פוטואלסטי  $f_{\sigma}$  הקובע את הקשר בין המאמצים בחומר לבין סדר הפסים של האיזוכרומטות (fringes). ערך זה נקבע ע"י היצרן, אך יכול להשתנות בשל השפעת לחות על החומר, עיבוד שבבי או תרמי וטיב פני שטח הדגם. כדי לאמת את ערכו של הקבוע הפוטואלסטי של החומר, יש לבצע ניסוי כיוול המתבסס על קיום משוואות המאפשרות חישוב שדה המאמצים בדיסקה הנתונה להעמסה נורמאלית משני כיוונים הפוכים כמתואר בפרק 2.2.1, Timoshenko & Goodier (1951). משוואות אלו מתבססות על ההנחה שקוטר הדיסקה נשאר עגול, אולם ידוע שבאיזור הקרוב לנקודת הפעלת העומס ישנה דפורמציה מקומית, הגורמת להגדלת שטח המגע עם הגדלת העומס, לכן הדיוק המקסימאלי שלהן הוא לאורך הקוטר האופקי של דיסקה, הרחוק משטח המגע. במחקר נעשה שימוש בדיסקות שקוטרן 20 מ"מ, שיוצרו בעזרת עיבוד שבבי עדין מפלטת חומר פוטואלסטי PSM9 בעובי 9.5 מ"מ מתוצרת חברת וישי (Vishay), שעבורו  $f_{\sigma} = 10500 N \setminus m$ .

### 1. כיוול עפ"י הקוטר האופקי

במקרה של העמסה נורמאלית סימטרית של דיסקה עגולה, ניתן לחשב את המאמצים לאורך הקוטר האופקי (כלומר  $y=0$ ) בצורה הבאה:

$$\sigma_{xx} = \sigma_1 = \frac{2P}{\pi Dh} \left( \frac{D^2 - 4x^2}{D^2 + 4x^2} \right)^2 \quad (1)$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_2 = -\frac{2P}{\pi Dh} \left[ \frac{4D^4}{(D^2 + 4x^2)^2} - 1 \right] \quad (2)$$

$$\tau_{xy} = 0 \quad (3)$$

כאשר:  $D$  – קוטר הדיסקה.

$x$  – מרחק לאורך הקוטר האופקי, מדוד ממרכז הדיסקה.

$h$  – עובי הדיסקה.

$P$  – כוח המופעל על הדיסקה.

אם נשתמש בקשר הפוטואלסטי :

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{Nf_{\sigma}}{2h} \quad (4)$$

ובביטוי עבור מאמץ גזירה מקסימאלי :

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (5)$$

כאשר : N – סדר פס האיזוכרומטה (fringe order).  
 $f_{\sigma}$  – הקבוע הפוטואלסטי של החומר.  
 h – עובי הדיסקה.

נקבל :

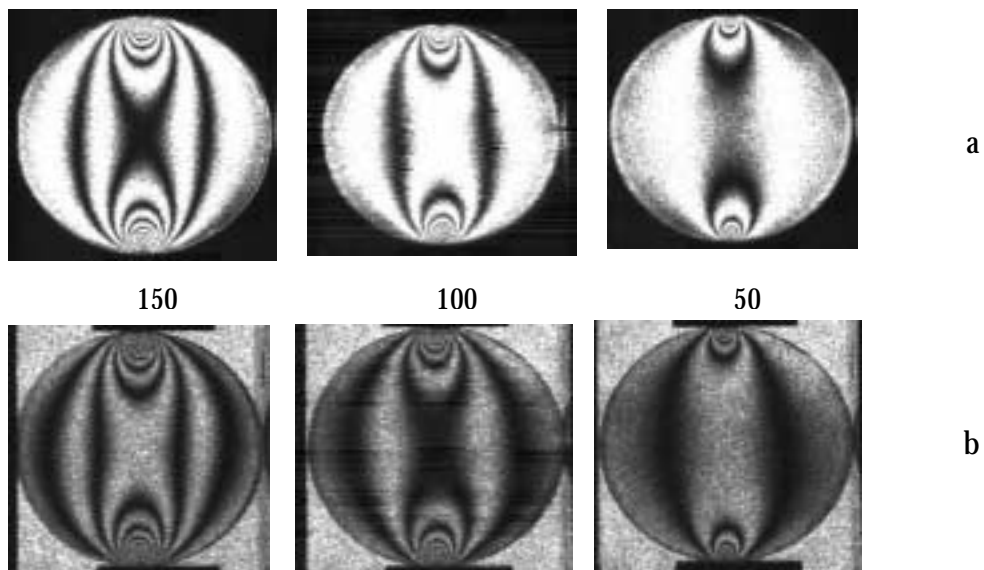
$$f_{\sigma} = \frac{8P}{\pi DN} g\left(\frac{x}{D}\right) \quad (6)$$

כאשר :

$$g\left(\frac{x}{D}\right) = \frac{1 - 4\left(\frac{x}{D}\right)^2}{\left[1 + 4\left(\frac{x}{D}\right)^2\right]^2} \quad (7)$$

## 1.1 מהלך הניסוי

לצורך הכיול וחקירת שדה המאמצים בדיסקה נבנה מתקן ניסוי המאפשר העמסה סטטית וסימטרית של דיסקה. בתחתית המתקן הותקן מד כוח (Load Cell) מתוצרת Kyowa, Japan דגם LC-50KF שעליו יושבת הדיסקה. שדה המאמצים הפוטואלסטי שנוצר בעקבות העמסה בכוח של 50, 100, 150 ניוטון צולם בשדה לבן ובשדה שחור ממקור אור מונוכרומטי (לייזר), בעזרת מצלמת CCD דיגיטאלית מתוצרת Sony, סה"כ 6 תמונות (איור 1). בעזרת תוכנת Mscope Player נלקחו מסי' נקודות דגימה מהציר האופקי העובר דרך מרכז הדיסקה מכל תמונה לצורך חישוב הקבוע הפוטואלסטי, הערך יהיה ממוצע הערכים שהתקבלו (טבלה 1).



איור 1. שדה המאמצים הפוטואלסטי בדיסקה בהעמסה סטטית: a- שדה שחור, b- שדה לבן.

## 1.2 תוצאות החישוב

מהנתונים בטבלה ניתן לראות:

1. הערך הממוצע של הקבוע הפוטואלסטי הוא  $7950 \text{ [N/m]}$ , ערך הרחוק מזה שסופק ע"י היצרן.
2. יש סטייה גדולה בערכי הקבוע הפוטואלסטי בין נקודה לנקודה, סטיית התקן הינה 1152, כלומר כ 15%.
3. הערך שהתקבל מושפע חזק מאופן בחירת הנקודות.



ישנן מספר סיבות לשגיאה :

1. בחלק מהתמונות הפסים במרכז הדיסקה עבים וקשה לדעת היכן הם עוברים במדויק, ובמקרים מסוימים (כמו בעומס של 50N בשדה שחור) אין פס במרכז הדיסקה.
2. אין מספיק נקודות לדגימה.
3. בעומסים גבוהים יהיו יותר פסים שיחתכו את הציר האופקי של הדיסקה, אך יתכן שנעבור את העומס המקסימאלי של החומר שמעבר לו ישארו מאמצים שיוריים בדיסקה.

$g(X/D)$	$f_{\sigma}$ [N/m]	x [mm]	D [mm]	P [N]	N	
0.52	6567	4.75	20	50	0.5	שדה לבן
0.27	6977	6.6	20	100	0.5	
0.18	6848	7.5	20	150	0.5	
0.74	9409	3.2	20	150	1.5	שדה שחור
0.65	8322	3.8	20	100	1	
0.44	8375	5.3	20	150	1	
0.96	9151	1.2	20	150	2	
		7950	ממוצע:			
			סטיית			
		1152	תקן:			

טבלה 1

### מסקנה

כיוול עפ"י השיטה המסורתית לא מספיק מדויקת, לכן חיפשנו אחר שיטה טובה יותר שתאפשר לקבל את ערכו של הקבוע הפוטואלסטי  $f_{\sigma}$  בצורה יותר מדויקת, ותצמצם את ההשפעה של אופן בחירת הנקודות על ערך זה. לאחר בדיקה בספרות מקצועית הוחלט לבצע כיוול בעזרת איסוף נתונים מכל שדה המאמצים בדיסקה, עפ"י שיטה שהציע (Ramesh (2000).

## 2. כיוול עפ"י נקודות משדה מלא

### 2.1 דרך החישוב

בכדי להעלות את דיוק הערך של הקבוע הפוטואלסטי של החומר המתקבל בתהליך הכיוול, יש לקחת נתונים ממספר רב ככל האפשר של נקודות על פני הדיסקה, לכן נשתמש במשוואות המתארות את שדה המאמצים בכל הדיסקה, Timoshenko & Goodier (1951). כמו כן את סדר הפס השיורי (השינוי בפסי האיזוכרומטות כתוצאה מהפרעות כגון מאמץ שיורי בדיסקה) נחשב כפונקציה ליניארית של הקואורדינטות  $x, y$  בצורה הבאה:

$$N_r(x, y) = Ax + By + C \quad (8)$$

סדר הפס בנקודה הוא סכום של סדר הפס המחושב מתיאורית המאמצים בדיסקה ושל סדר הפס השיורי  $N_r$

$$N(x, y) = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)h}{f_\sigma} + N_r(x, y) \quad (9)$$

נסמן:

$$S(x, y) = (\sigma_1 - \sigma_2)h = \frac{4PR}{\pi} \frac{R^2 - (x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2 + R^2)^2 - 4y^2R^2} \quad (10)$$

עבור כל נקודה  $(x_m, y_m)$  ניתן לחשב את סדר הפס ע"י:

$$N_m(x_m, y_m) = \frac{1}{f_\sigma} S_m(x_m, y_m) + Ax_m + By_m + C \quad (11)$$

את  $x_m, y_m, N_m$  ניתן להוציא מתמונת המאמצים של דיסקה פוטואלסטית, את הערכים של  $1/f_\sigma, A, B, C$  יש לחשב. מאחר וישנם ארבעה נעלמים, מספיקות ארבע משוואות כדי למצוא אותם, לכן באופן עקרוני מספיקות ארבע נקודות. אולם לפיתרון תהיה תלות חזקה בבחירת הנקודות, אך אם נבחר מספר נקודות גדול מארבע נקבל יותר משוואות מנעלמים. הדרך המקובלת לפיתרון בעיות מסוג זה היא לקבל סט חדש של משוואות, בעזרת שיטת הריבועים הפחותים, שבו מספר המשוואות שווה למספר הנעלמים.

אם יש לנו M נקודות ( $M > 4$ ), השגיאה המצטברת תהיה:

$$e = \sum_{m=1}^M \left[ \frac{1}{f_\sigma} S_m(x_m, y_m) + Ax_m + By_m + C - N_m \right]^2 \quad (12)$$

קריטריון הריבועים הפחותים דורש ש:

$$\frac{\partial e}{\partial(1/f_\sigma)} = \frac{\partial e}{\partial(A)} = \frac{\partial e}{\partial(B)} = \frac{\partial e}{\partial(C)} = 0 \quad (13)$$

דרישה זו תיתן לנו סט של ארבע משוואות שפתרון ייתן לנו את הערכים אותם אנו רוצים לחשב:

$$\sum_{m=1}^M 2 \left[ \frac{1}{f_\sigma} S_m(x_m, y_m) + Ax_m + By_m + C - N_m \right] S_m(x_m, y_m) = 0 \quad (a) \quad (14)$$

$$\sum_{m=1}^M 2 \left[ \frac{1}{f_\sigma} S_m(x_m, y_m) + Ax_m + By_m + C - N_m \right] x_m = 0 \quad (b)$$

$$\sum_{m=1}^M 2 \left[ \frac{1}{f_\sigma} S_m(x_m, y_m) + Ax_m + By_m + C - N_m \right] y_m = 0 \quad (c)$$

$$\sum_{m=1}^M 2 \left[ \frac{1}{f_\sigma} S_m(x_m, y_m) + Ax_m + By_m + C - N_m \right] = 0 \quad (d)$$

סט המשוואות הנ"ל יכול להיכתב בצורה מטריציונית:

$$\begin{aligned} 2 \{ [v]^T [v] \{u\} - [v]^T \{N\} \} &= 0 \\ \Downarrow \\ \{ [v]^T [v] \{u\} - [v]^T \{N\} \} &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

כאשר:

$$[v] = \begin{bmatrix} S_1 & x_1 & y_1 & 1 \\ S_2 & x_2 & y_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ S_M & x_M & y_M & 1 \end{bmatrix}, \{u\} = \begin{bmatrix} 1/f_\sigma \\ A \\ B \\ C \end{bmatrix}, \{N\} = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_M \end{bmatrix}$$

את וקטור הנעלמים  $\{u\}$  ניתן לחשב ע"י הכפלת שני האגפים ב  $\{[v]^T [v]\} : inv$

$$\begin{aligned} inv \{[v]^T [v]\} [v]^T [v] \{u\} &= inv \{[v]^T [v]\} [v]^T \{N\} \\ \Downarrow \\ \{u\} &= inv \{[v]^T [v]\} [v]^T \{N\} \end{aligned} \quad (16)$$

על מנת שהתוצאות תהיינה בלתי תלויות ככל האפשר בבחירת הנקודות שמהן ניקח את הנתונים, יש לשלב את שיטת הריבועים הפחותים עם תהליך דגימה אקראי. ניתן לעשות זאת ע"י הרכבת סט נתונים ראשי מאיסוף מספר רב של נקודות דגימה, כמו כן יש לבחור מתוכן בצורה אקראית מספר נקודות שירכיבו סטים משניים של נתונים. עבור כל אחד מהסטים יש לחשב את וקטור הנעלמים ולהוציא מתוכו את ערך הקבוע הפוטואלסטי  $f_\sigma$ , הערך הסופי שלו יהיה ממוצע הערכים שהתקבלו מסט הנתונים הראשי ומהסטים המשניים. איסוף של נתונים מ 40 נקודות, והרכבה של 6 סטים בני 20 נקודות אקראיות, יספיקו. חשוב לוודא שהערכים שהתקבלו אכן תואמים את תוצאות הניסוי והערכים התיאורטיים של המאמץ.

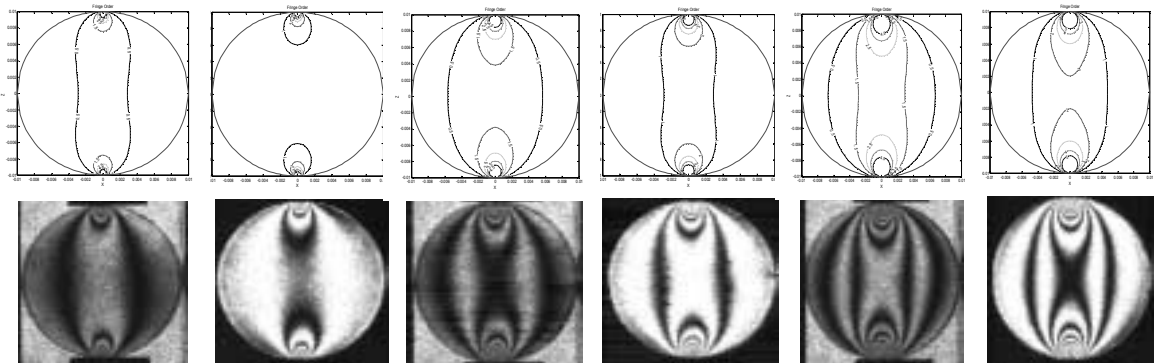
## 2.2 יישום השיטה

מכל תמונה באיור 1 נלקחו 6-8 נקודות דגימה, סה"כ 44 נקודות. נתוני הנקודות הוזנו לתוכנית מחשב בשפת Matlab שנכתבה לצורך זה. התוכנית לוקחת מתוכם 20 נקודות אקראיות ומבצעת את החישוב כפי שהוסבר. כדי להקטין השגיאה, התוכנית חוזרת על הרצת תהליך זה מספר רב של פעמים ומחשבת את ממוצע הערכים של  $f_\sigma$  וסטיית התקן שלהם.

### 2.3 תוצאות החישוב

ערכו של הקבוע הפוטואלסטי המתקבל מתהליך החישוב לדיסקה זו הוא:  
 $f_{\sigma} = 10130 \text{ N}/(m \cdot \text{fringe})$  וסטיית התקן 130. הערך של הקבוע הפוטואלסטי שניתן ע"י  
 היצרן הוא  $f_{\sigma} = 10500 \text{ N}/(m \cdot \text{fringe})$  כלומר יש שוני של 3.5%. שוני זה סביר בהתחשב  
 בעיבוד השבבי שעבר החומר ואת אי המושלמות הגיאומטרית של הדיסקה ואופן הפעלת הכוח.

כדי לבדוק האם שדה המאמצים שהתקבל בעזרת ערכו של הקבוע הפוטואלסטי תואם את שדה  
 המאמצים שהתקבל מהניסוי, בוצע שיחזור של תמונת שדה המאמצים בעזרת תוכנית בשפת  
 Matlab המבצעת חישוב תיאורטי של סדר הפס ובונה תמונה על סמך ערכים אלו. השוואה  
 לתמונות הניסוייות מופיע להלן. ניתן לראות התאמה טובה בין הניסוי לתיאוריה.



שדה לבן

שדה שחור

שדה לבן

שדה שחור

שדה לבן

שדה שחור

איור 2. השוואה של האיזוכרומטות: חישוב מול ניסוי.

## **Abstract**

The study of wave propagation and the transfer of the dynamic load in granular and particulate media have been investigated quite intensively during the past two decades by researchers from many different fields of science such as earthquake research and protection of underground constructions against blast. Several techniques were used to simplify the investigation of granular media, such as simulating the media as a 1D or a 2D arrangement of cylindrical discs.

In the present study, experiments were conducted in a vertical shock tube with an optically transparent single straight chain of 20-mm diameter discs made of epoxy. The dynamic time dependent fringe patterns of the stress in the contact points between the discs were registered using a YAG laser, a transmission polariscope and CCD cameras. The main details of the experiment, the data acquisition and the computer aided processing are briefly discussed first. Thereafter the stress wave propagation and its reflection at the chain boundaries are analyzed based on the results of photo-elastic experiments and their comparison with those obtained using strain gauge measurements. The dispersion of the impacting shock wave step shaped pulse to a series of shorter pulses and the role of the length of the chain were also analyzed.



**Ben-Gurion University of the Negev**  
**Faculty of Engineering Sciences**  
**Department of Mechanical Engineering**

**Experimental investigation of the interaction of a shock wave  
with a chain of photoelastic disks**

**Thesis submitted in partial fulfillment of the requirements for the M.Sc. degree**

by

**Binyamin Glam**

**January 2004**



**Ben-Gurion University of the Negev**  
**Faculty of Engineering Sciences**  
**Department of Mechanical Engineering**

**Experimental investigation of the interaction of a shock wave  
with a chain of photoelastic disks**

**Thesis submitted in partial fulfillment of the requirements for the M.Sc. degree**

by

**Binyamin Glam**

Supervised by

**Dr. Britan Alexander**

**Prof. Ben-Dor Gabi**

**Prof. Igra Ozer**

**January 2004**